

Terza dimostrazione: iterate di PICARD

Supponiamo che $\delta > 0$ soddisfi

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{\eta_0}{M}$$

Allora esiste soluzione della form. int. su $[t_0, t_0 + \delta]$.

Punto di partenza: sia Φ l'operatore di Volterra e sia $X_{\delta, \eta}$ l'insieme di prima, in modo tale che

$$\Phi : X_{\delta, \eta} \rightarrow X_{\delta, \eta}$$

Dico che vale questa stima

$$|[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| \leq L \operatorname{dist}(u, v) (t - t_0)$$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta] \quad \forall (u, v) \in X_{\delta, \eta}^2$$

Solito conto:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t \operatorname{dist}(u, v) ds \\ &\leq L \cdot \operatorname{dist}(u, v) \cdot (t - t_0) \end{aligned}$$

Introduciamo le ITERATE DI PICARD: poniamo $u_0(t) \equiv u_0$ e poi per ricorrenza

$$u_{n+1}(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds = [\Phi(u_n)](t)$$

Si verifica che tutte le $u_n \in X_{\delta, \eta}$.

Claim: vale la stima

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \text{dist}(u_0, u_1) \frac{L^n (t-t_0)^n}{n!} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ \forall n \in \mathbb{N}$$

La dimostriamo per induzione.

Per $n=0$ è ovvia.

Supponiamola vera per n . Allora

$$|u_{n+2}(t) - u_{n+1}(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, u_{n+1}(s)) - f(s, u_n(s))) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_{n+1}(s)) - f(s, u_n(s))| ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^t |u_{n+1}(s) - u_n(s)| ds$$

hp ind. $\nearrow$

$$\leq L \frac{L^n \text{dist}(u_1, u_0)}{n!} \underbrace{\int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds}_{\frac{1}{n+1} (t - t_0)^{n+1}}$$

$$= L^{n+1} \text{dist}(u_1, u_0) \frac{1}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1} \quad \text{☺}$$

Dalla disuguaglianza deduco che

$$\text{dist}(u_{n+1}, u_n) \leq \text{dist}(u_1, u_0) \frac{L^n \delta^n}{n!}$$

Da questa deduco che $\{u_n\}$ è di Cauchy rispetto a dist.

Infatti per ogni $m > n$ vale

$$\text{dist}(u_m, u_n) \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{i=n}^{m-1} \text{dist}(u_{i+1}, u_i) \\ \leq \text{dist}(u_1, u_0) \sum_{i=n}^{m-1} \frac{L^i \delta^i}{i!}$$

$$\leq \text{dist}(u_1, u_0) \underbrace{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{L^i \delta^i}{i!}}$$

coda di serie convergente,
e quindi è $\leq \varepsilon$ per n
abb. grande

Essendo $\{u_n\}$ di Cauchy, sappiamo che $u_n \rightarrow u_\infty$
unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$.

Per concludere basta passare al limite

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1}(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ u_\infty(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds \end{array}$$

Si conclude pur di poter passare al limite. Al LHS è
ovvio (basta la puntuale).

Al RHS servirebbe che $f(s, u_n(s)) \rightarrow f(s, u_\infty(s))$
unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$, e di questo parleremo + avanti.

Oss. La dim. di PICARD è la stessa del teo. delle contrazio-
ni, solo che è più efficiente nel dimostrare
che la succ. $\{u_n\}$ è di Cauchy.

Quarta dimostrazione Stesse scelte minimaliste

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{L_0}{M}$$

Consideriamo le iterate n -esime dell'operatore di Volterra.

Allora vale la stima $(\Phi^{(n)} = \Phi \circ \dots \circ \Phi)$

$$\text{dist}(\Phi^{(n)}(u), \Phi^{(n)}(v)) \leq \frac{L^n \delta^n}{n!} \text{dist}(u, v)$$

Se lo dimostro, allora per n grande ho che $\Phi^{(n)}$ è una contrazione, dunque ha un unico pto fisso. Da questo si deduce che Φ ha un unico pto fisso.

Lemma Sia X un insieme e sia $\Phi: X \rightarrow X$ una funzione.

Supponiamo che esista $n \geq 1$ t.c. $\Phi^{(n)}$ ha un unico pto fisso.

Allora Φ ha un unico pto fisso.

Dim Unicità Ogni pto fisso di Φ lo è pure per $\Phi^{(n)}$

Esistenza Sia x_0 il pto fisso di $\Phi^{(n)}$. Poniamo $\Phi(x_0) = y_0$

Dico che $y_0 = x_0$. Osservo che

$$\Phi^{(n)}(y_0) = \Phi^{(n+1)}(x_0) = \Phi(\Phi^{(n)}(x_0)) = \Phi(x_0) = y_0$$

$\uparrow$
 x_0 fix di $\Phi^{(n)}$

Essendo il pto fisso di $\Phi^{(n)}$ unico, allora per forza $x_0 = y_0$.

— o — o —

Per completare la quarta dimostrazione basta dimostrare che

$$\text{dist}(\phi^{(n)}(u), \phi^{(n)}(v)) \leq \frac{L^n \delta^n}{n!} \text{dist}(u, v)$$

Procediamo per induzione. Il caso $n=1$ segue dalle solite

$$|[\phi(u)](t) - [\phi(v)](t)| \leq L \text{dist}(u, v) \underbrace{(t-t_0)}_{\leq \delta}$$

da qui otteniamo

$$|[\phi^{(n)}(u)](t) - [\phi^{(n)}(v)](t)| \leq \text{dist}(u, v) \frac{L^n \overbrace{(t-t_0)^n}^{\leq \delta^n}}{n!}$$

da cui quella volta

Passiamo da n ad $(n+1)$:

$$\begin{aligned} |[\phi^{(n+1)}(u)](t) - [\phi^{(n+1)}(v)](t)| &\leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \phi^{(n)}(u)(s)) - f(s, \phi^{(n)}(v)(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\phi^{(n)}(u)(s) - \phi^{(n)}(v)(s)| ds \end{aligned}$$

$$\text{hp ind.} \nearrow \leq L \text{dist}(u, v) \frac{L^n}{n!} \int_{t_0}^t (s-t_0)^n ds$$

$$= L^{n+1} \text{dist}(u, v) \frac{1}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1}.$$

— o — o —

Esercizio (Passaggio al limite di integrali)

$$R := [t_0, t_0 + \delta] \times \overline{B}_{r_0}(u_0)$$

$$f: R \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ continua}$$

$$u_n(t) \rightarrow u_\infty(t) \text{ unif. in } [t_0, t_0 + \delta]$$

Tutte le $u_n(t)$ sono a valori in $\overline{B}_{r_0}(u_0)$

$$\text{Allora } f(t, u_n(t)) \rightarrow f(t, u_\infty(t)) \text{ unif. in } [t_0, t_0 + \delta]$$

Dim. Il p.to fondamentale è che f è unif. continua.

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $\hat{\delta} > 0$ che mi fornisce ε nell'unif. cont. di f

• Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{dist}(u_n, u_\infty) \leq \hat{\delta}$ per ogni $n \geq m_0$

• Dico che per ogni $n \geq m_0$ vale

$$|f(t, u_\infty(t)) - f(t, u_n(t))| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Questo è vero perché la distanza in $\mathbb{R}^{k+1}$ tra $(t, u_\infty(t))$ e $(t, u_n(t))$ è $\leq \hat{\delta}$ e quindi le corrispondenti f sono a distanza $\leq \varepsilon$.

Oss. Ho usato solo che f è unif. cont. nella 2ª variabile
le unif. rispetto alla 1ª.

— o — o —