

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Setting semplificato : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto
 $(t_0, u_0) \in \Omega$
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Più in generale possiamo considerare dei sistemi

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ aperto

$$\begin{cases} U' = f(t, U) \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

$(t_0, U_0) \in \Omega$

$\uparrow$ k componenti

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ cont.

$$U(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$$

Mega fatto : equazioni / sistemi di ordine qualunque
 si riducono sempre a SISTEMI di ordine 1.

Esempio $u'' + t u' + 7u^2 = \sin t$

$$u'' + u^3 + u^{27} = 0$$

$$u' = v$$

$$v' = -tv - 7u^2 + \sin t$$

$$u' = v$$

$$v' = -u^3 - v^{27}$$

$$\vec{U} = f(t, U)$$

Basta fare una teoria per sistemi di ordine 1.

Se parto in forma normale mi ritrovo in forma normale.

Cosa vuol dire risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Vuol dire trovare due cose:

- un intervallo (a, b) che contiene t_0
- una funzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che
 - u è di classe C^1
 - $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a, b)$
 - risolve l'eq. nel senso che

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in (a, b).$$

- verifica il dato iniziale $u(t_0) = u_0$.

Achtung! Anche l'intervallo (a, b) di definizione è tra le incognite.

— o — o —

FORMULAZIONE INTEGRALE — OPERATORE DI VOLTERRA

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Formulazione
integrale

↑
integrale di funzione
vettoriale

Def. L'operatore di Volterra manda funzioni in funzioni ed è definito dal RHS della formulazione integrale.

Cosa vuol dire risolvere la formulazione integrale?

Vuol dire trovare due cose:

→ un intervallo (a, b) che contiene t_0

→ una funzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ t.c.

- u è continua in (a, b)
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a, b)$
- u verifica la rel. prevista dalla form. integrale per ogni $t \in (a, b)$.

Prop. Una funzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ verifica il pbm. di Cauchy nel senso diff. del termine se e solo se risolve la formulazione integrale.

Dim. Diff. $\Rightarrow$ Int. Prendo l'eq. diff. e integro in $[t_0, t]$.

Int $\Rightarrow$ Diff.

- Ponendo $t = t_0$ nella form. int. ottengo $u(t_0) = u_0$
- Il fatto che $u \in C^1$ segue dal fatto che $f(s, u(s))$ è C^0 (almeno se $f \in C^0$) e quindi posso usare il teo. fond. del calcolo integrale
- Il fatto che risolve l'eq. segue allo stesso modo
— o — o —

Teorema (Di esistenza e unicità)
(CAUCHY, LIPSCHITZ, PICARD, LINDELOF)

Supponiamo che f sia Lipschitziana in u unif. rispetto a t , cioè esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

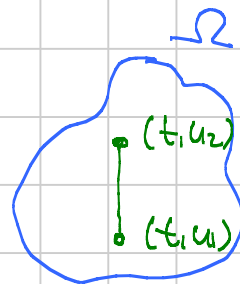
$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad (\text{uovve in } \mathbb{R}^k)$$

per ogni u_1 e u_2 con $(t, u_1) \in \Omega$ e $(t, u_2) \in \Omega$.

Allora

→ il problema ammette almeno una soluzione

→ due soluzioni sullo stesso intervallo (a, b) coincidono.



Teorema (di sola esistenza) (PEANO)

Supponiamo f solo continua.

Allora il problema ammette almeno una soluzione.

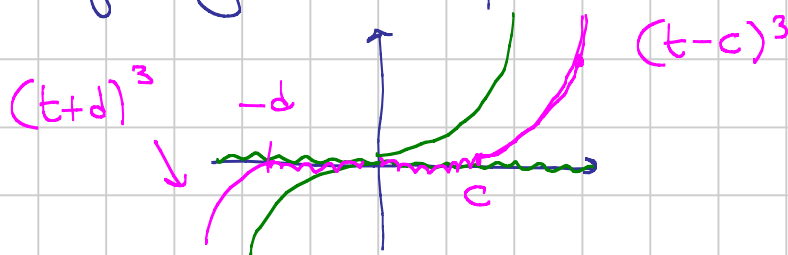
Esempio di non unicità $\begin{cases} \ddot{u} = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

• Una sol. è $u(t) \equiv 0$ (definita su tutto $\mathbb{R}$)

• Un'altra sol. è

$$u(t) = t^3$$

• Pennello di PEANO: una famiglia a 2 parametri di soluzioni è



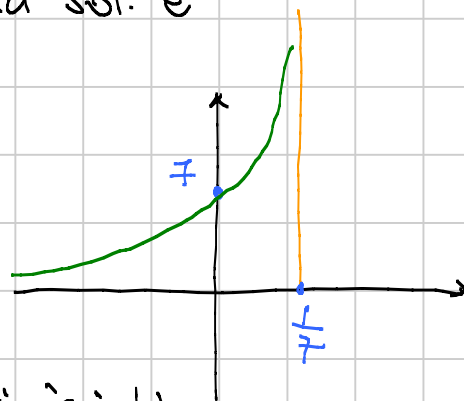
Esempio di NON ESISTENZA GLOBALE

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

L'insieme Ω è tutto $\mathbb{R}^2$. Tuttavia la sol. è

$$u(t) = \frac{7}{1-7t}$$

ed è definita sol per $t < \frac{1}{7}$



Il tempo di vita dipende dalle cond. iniziali.

Il break down è quando la coppia $(t, u(t))$ esce dalla zona di definizione di f , cioè l'aperto Ω .

Per dimostrare i teoremi si usa la formulazione INTEGRALE con l'operatore di Volterra.

A questo punto si può procedere in due modi

→ VIA COMPLETEZZA, cioè teorema delle contrazioni, cioè cerco un pto fisso dell'operatore di Volterra

→ VIA COMPATTEZZA, cioè mediante problemi approssimanti.

— o — o —