

RIGIDITÀ DELLE FUNZIONI ANALITICHE

Teorema Sia $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ (funzione analitica)

Allora $\mathcal{Z}$ insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

ha solo 2 possibilità:

→ è tutto $\mathbb{R}$

→ è costituito solo da p.ti isolati. (non ha p.ti di accum.)

Cor.1 Se $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ si annulla su un insieme che ha un p.to di accumulazione, allora $f(x) \equiv 0$.

Cor.2 Se $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ e $g \in C^\omega(\mathbb{R})$ coincidono su una successione $\{x_n\}$ convergente, allora

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dim. Applico thm. 1 alla differenza

Oss.

① Non basta che $f(x) = g(x)$ per infiniti valori di x

[$\sin x$ e $2 \sin x$ coincidono in $\pi \mathbb{Z}$]

② Se f e $g \in C^\omega(A)$ con A aperto, allora non basta che $f(x_n) = g(x_n)$ con $x_n \rightarrow x_\infty \notin A$

[$\sin \frac{1}{x}$ e $2 \sin \frac{1}{x}$ con $A = (0, +\infty)$]

③ Generalizzazione teo. ad aperto A .

Dim. 1^o. Supponiamo $f(x) \not\equiv 0$. Sia $f(x_0) = 0$.
Per analiticità sviluppo $f(x)$ in un intorno di x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primo} \\ \text{coeff. non nullo}}}{C_k} (x-x_0)^k + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{può anche essere nullo}}}{C_{k+1}} (x-x_0)^{k+1} + \dots$$

$$= (x-x_0)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k} (x-x_0)^n}_{\text{somma di serie di potenze, quindi continua che indico con } g(x)}$$

somma di serie di potenze, quindi continua che indico con $g(x)$

Ora $g(x)$ è continua e $g(x_0) = C_k \neq 0$, quindi $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 .

Quindi abbiamo dim che

→ o esiste un intorno di x_0 in cui $f \equiv 0$

→ o esiste un intorno di x_0 in cui f si annulla solo in x_0 .

Per dire le cose per bene devo prendere il luogo di zeri, considerare il complementare, prendere un pto sulla frontiera e concludere.

Esercizio (Disuguaglianza alla KOJASEVIC)

Sia f analitica in $\mathbb{R}$.

Supponiamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste una costante K_M tale che

$$|f'(x)| \leq K_M [f(x)]^{1/2} \quad \forall x \in [-M, M]$$

CONTRO NATURA: stima la derivata con la funzione

Dim. Se $f(x) \equiv 0$, allora non è difficile 😊.

Altrimenti per ogni M avremo che $f(x)$ si annulla solo un # finito di volte in $[-M, M]$. Al di fuori di questi pti definisco

$$\varphi(x) := \frac{|f'(x)|}{|f(x)|^{1/2}}$$

Per mostrare che $\varphi(x)$ è limitata sup, basta fare il Dim(sup) nei pti $x_1, \dots, x_n$ in cui si annulla il denom. Prendo x_i e sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_i)^n = C_{2k} (x-x_i)^{2k} + \dots$$

↑
indice PARI e > 0 per studio locale (uso $f(x) \geq 0$)

$$= C_{2k} (x-x_i)^{2k} \{ 1 + \text{roba che si annulla in } x_i \}$$

$$= C_{2k} (x-x_i)^{2k} g(x)$$

↑ $\neq 0$ in un intorno di x_i

$$f'(x) = 2k C_{2k} (x-x_i)^{2k-1} \gamma(x)$$

↑ continua

$$\frac{|f'(x)|}{|f(x)|^{1/2}} = \frac{2k C_{2k} |x-x_i|^{2k-1} |\gamma(x)|}{\sqrt{C_{2k}} |x-x_i|^k [g(x)]^{1/2}}$$

Se semplifico, resta sopra $|x-x_i|^{k-1}$ e l'esponente è ≥ 0 e quindi il lim per $\underline{x \rightarrow x_i}$ è finito (se $k=1$) oppure 0

Esercizio (non facile) Mostrare che L'opsteinic non vale per funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio Dimostrare che esiste un'unica funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analitica (anzi INTERA) tale che

$$t u''(t) = u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 2018$$

Def. Una funzione si dice INTERA se il raggio di convergenza della sua serie di Taylor in un pto (dunque in ogni pto) è $+\infty$ (ed è analitica)

Oss. L'equazione non è in forma normale e portarcela crea problemi.

Risoluzione per serie Cerco una soluzione del tipo

$$u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

Derivando per serie (posto che sia possibile) trovo

$$u''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2}$$

$$t u''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} (n+1)n t^n$$

↑
shift
indici

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

↑
Equazione

Uguagliando i coeff., segue che

• $c_0 = 0$ (per "fortuna" abbiamo scelto $u(0)$, ma questa era cond. nec. per poter risolvere)

• $c_{n+1}(n+1)n = c_n$ per ogni $n \geq 1$
da cui

$$c_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} c_n \quad \forall n \geq 1$$

Restano due cose

→ trovare c_1 (uso qui che $u'(0) = 2018 \leadsto c_1 = 2018$)

→ stimare il raggio di conv. della serie di potenze

Con i soliti metodi (rapporto $\rightarrow$ radice) si verifica che

$$\sqrt[n]{c_n} \rightarrow 0 \quad \text{e quindi} \quad R = \frac{1}{L} = +\infty.$$

Da questo momento in poi i calcoli fatti prima sono rigorosi.

— o — o —

Esercizio Dimostrare che, se la succ. a_n è t.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

allora la funzione

$$u(t, x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

è di classe C^∞ su tutto $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$

e risolve l'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx}$.

— o — o —