

FUNZIONI ANALITICHE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto (non vuoto). Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice analitica in A se è di classe C^∞ in A e per ogni $x_0 \in A$ esiste $r > 0$ t.c. $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$ e la serie di Taylor con centro in x_0 converge ad $f(x)$ in $(x_0 - r, x_0 + r)$, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

L'insieme delle funzioni analitiche in A si indica con $C^\omega(A)$ ← omega minuscolo

Oss. Esistono funzioni C^∞ che non sono analitiche: posso scrivere la serie di Taylor ma questa o non converge, o converge a roba $\neq f(x)$.

[Basta prendere "eppm si muove", tipo $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ estesa ponendo $f(0) = 0$. La sua serie di Taylor in 0 è identicamente nulla $\leadsto$ non analitica in nessun aperto A che contiene 0].

Proprietà

- $C^\omega(A)$ è uno sp. vett. (facile: le derivate di una comb. lin. sono comb. lin. delle derivate)
- prodotto di funzioni analitiche è analitico (lo dimostreremo e non è ovvio)
- le funzioni "classiche" (sin x, e^x, cos x, arctan x ...) sono analitiche dove non hanno problemi

- derivate / primitive di funzioni analitiche sono analitiche (facile: shift degli indici sulle serie di Taylor)
- composizione di funzioni analitiche è analitica (vero ma per nulla ovvio e non lo dimostriamo)
- rapporto di funs. analitiche è analitico dove denomin $\neq 0$ (ovvio se dim. che $\frac{1}{x}$ è analitica in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e so che la comp. è analitica)
- le serie di potenze sono funzioni analitiche (meno ovvio di quanto sembra)

Proposizione Sia $R > 0$ e supponiamo che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \forall x \in (-R, R) \quad \text{raggio di conv.}$$

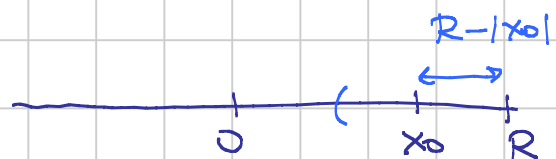
Allora $f \in C^{\infty}((-R, R))$

Dim. Abbiamo già visto, derivando per serie, che

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da questo segue che la serie di Taylor in $x_0 = 0$ converge ad $f(x)$. Mi serve che valga la stessa cosa per ogni $x_0 \in (-R, R)$.

Step 1 Preso $x_0 \in (-R, R)$ dimostriamo che la serie di Taylor con centro in x_0 converge con il massimo raggio possibile, cioè $R - |x_0|$



Stiamo le derivate di $f(x)$. Fisso $|x_0| < r < R$

$$\frac{1}{|x_0|} \quad r \quad R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \text{ converge}$$

Quindi esiste M_r t.c. $|c_n| \cdot r^n \leq M_r$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} \underbrace{k! \binom{n}{k} x^{n-k}}_{\text{derivata } k\text{-esima di } x^n} c_n$$

da cui

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq \sum_{n \geq k} |c_n| \cdot k! \binom{n}{k} |x|^{n-k} \\ &\leq k! \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} M_r \frac{1}{r^n} x^{n-k} \\ &= M_r k! \frac{1}{r^k} \underbrace{\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n-k}}_{\text{si calcola}} \end{aligned}$$

$$= M_r k! \frac{1}{r^k} \frac{1}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{k+1}} \quad \forall x \in (-r, r)$$

Metto $x = x_0$ e ottengo

$$\underbrace{\frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!}}_{\text{coeff. della serie di Taylor centrata in } x_0} \leq \frac{M_r}{r^k} \frac{1}{\left(1 - \frac{|x_0|}{r}\right)^{k+1}}$$

coeff. della serie di Taylor centrata in x_0

Per avere il raggio di conv. faccio il limite della radice k -esima e questo viene

$$\frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{|x_0|}{r}} = \frac{1}{r - |x_0|} \leadsto \text{reciproco è } r - |x_0|$$

Potremo scegliere r in $(|x_0|, R)$, il miglior raggio garantito è $R - |x_0|$.

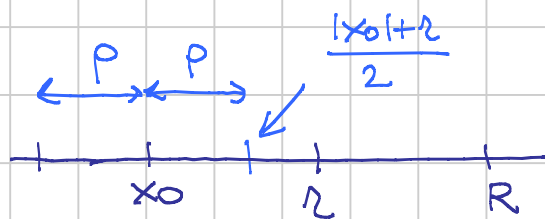
Step 2 Resta da dim. che la serie converge proprio a $f(x)$, anche a meno di restringere l'intervallo di x_0 . Per far questo basta usare il criterio di convergenza di qualche ser. precedente, cioè verificare che esiste $\rho > 0$ t.c.

$$|f^{(k)}(x)| \leq M_\rho \frac{k!}{\rho^k} \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dalla stima precedente sulla derivata basta verificare che

$$M_\rho \frac{\cancel{k!}}{2^k \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^{k+1}} \leq M_\rho \frac{\cancel{k!}}{\rho^k} \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

e qui posso scegliere r e ρ



Gli x più pericolosi sono quelli grandi

$$M_\rho \frac{1}{2^k \left(1 - \frac{|x_0|+2}{2}\right)^{k+1}} \leq M_\rho \left(\frac{2}{2 - |x_0|}\right)^k$$

e ora basta fare il conto e trova

Oss. La prop. precedente sistema l'analisi della analiticità delle funzioni elementari

[La serie di Taylor di $\sin x$ centrata in $x_0 = 0$ converge in $(-3000, 3000)$, quindi converge in un intorno anche quella centrata in $x_0 = 2018$]

Esercizio Dimostrare che $f(x) = \frac{1}{x}$ è analitica per $x \neq 0$.

Prendo $x_0 \neq 0$. Calcolo le derivate

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$$

Quando mi metto in x_0 il coeff. della serie di potenze è

$$c_k = (-1)^k \frac{k!}{x_0^{k+1}} \cdot \frac{1}{k!} \leadsto \limsup \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{|x_0|}$$

$$\leadsto R = |x_0|$$

Devo accertarmi che converga proprio a $\frac{1}{x}$, eventualmente in un intorno più piccolo.

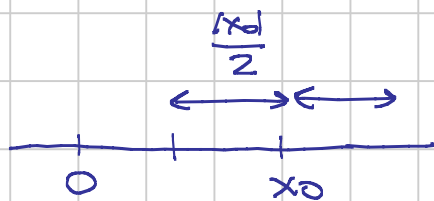


3° modo Spero di trovare $\rho > 0$ e M_ρ t.c.

$$|f^{(k)}(x)| \leq M_\rho \frac{k!}{\rho^k} \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Gli x più pericolosi sono quelli + piccolì, quindi mi serve

$$\frac{k!}{(|x_0| - \rho)^{k+1}} \leq M_\rho \frac{k!}{\rho^k}$$



Prendendo $\rho = \frac{|x_0|}{2}$ troviamo

$$\frac{1}{\rho^{k+1}} \leq M_\rho \frac{1}{\rho^k} \quad \text{vera con } M_\rho = \frac{1}{\rho}$$

La serie converge in $(0, 2x_0)$, ma ho garanzia di convergenza a $f(x)$ solo in $(\frac{x_0}{2}, \frac{3}{2}x_0)$

2° modo Riciclo la geometria

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{x_0 + x - x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + \frac{x-x_0}{x_0}} \\ &= \frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-x_0}{x_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}} (x-x_0)^n \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\end{aligned}$$

L'uguaglianza vale quando $\frac{x-x_0}{x_0} \in (-1, 1)$, cioè

quando $x \in (0, 2x_0)$, cioè proprio nel massimo raggio possibile.

— o — o —

Oss. Questo mostra che $\log x$ è analitica in $(0, +\infty)$.