

Come calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

È un esercizio di Analisi 3, ma...

ultra brutal mode (by Euler).

Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici. Allora

$$\sum \lambda_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \sum \lambda_i \lambda_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i^2 &= \left(\sum \lambda_i \right)^2 - 2 \left(\sum \lambda_i \lambda_j \right) = \frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} - 2 \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 - 2 a_n a_{n-2}}{a_n^2} \end{aligned}$$

$$\sum \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)^2 = ? \quad \text{Se } x \text{ risolve } p(x) = 0, \text{ allora } \frac{1}{x} \text{ risolve } p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Morale $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sono le radici di

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$$

$$\text{e quindi } \sum \frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{a_1^2 - 2 a_0 a_2}{a_0^2} \quad \text{☺}$$

Facciamo finta che valga per le serie di potenze

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 + \dots$$

Le radici di $f(x)$ sono $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Quindi

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{1}{k^2 \pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2} = \frac{2}{6}$$

Da cui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ☺

Idea: provare con il cubo (per il quale non c'è una formula) e vedere cosa succede.

Varianti della geometria

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

è come se partissi da $n=k$ perché prima viene $=0$ il binomiale

Dim. Deriviamo k volte la geometria usando teo. scambio

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(k)} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^{(k)} \\ &\stackrel{\text{induzione}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} k! \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \end{aligned}$$

$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

Semplificando $k!$ abbiamo la tesi

Esercizio Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 2n) x^n$$

La prima la scrivo come

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} x^{n-1}}_{k=1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Per la seconda osservo che

$$n^2 = \binom{n}{2} \cdot 2 + \binom{n}{1} \quad \text{da cui}$$
$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= x^2 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} x^{n-1} \\ &= 2x^2 \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Allo stesso modo si fa la 3ª.

Oss. Una pensa $1, n, n^2, n^3$ come base dello spazio dei polinomi, ma in questo caso una base + comoda è

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \dots$$

— 0 — 0 —

Esercizio Calcolare il raggio di conv. di

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{C_n} = \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty = L \text{ quindi } R = \frac{1}{L} = 0$$

NO!!! sarebbe così se ci fosse $n! x^n$

Detto per bene

$$C_n := \begin{cases} k! & \text{se } n = k^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Devo fare

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \text{altrove fa 0}}} \sqrt[k^2]{k!} = 1 \leadsto R = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left[1 \leq k! \leq k^k \leadsto \underbrace{1}_{=0} \leq \underbrace{\sqrt[k^2]{k!}}_{=0} \leq \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{=0} \leadsto \text{carabinieri} \right]$$

Esercizio Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{(2n)!}$$

Sono 2 casi particolari di

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

che conv. unif. sui compatti di $\mathbb{R}$ (perché $R = +\infty$)

[Euristiche nel video ...]

Se $x \geq 0$, pongo $x = y^2$ e trovo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \cosh y = \cosh \sqrt{x}$$

Per $x \leq 0$, pongo $x = -y^2$ e trovo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y^2)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \cos y = \cos(\sqrt{-x})$$

Esercizio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 4n + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+1)} x^n$$

$$\frac{1}{(n+3)(n+1)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1} \quad \text{per opportuni } A \text{ e } B$$

Quindi mi riduco a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3}$$

La posso vedere come serie di Taylor di $-\log(1-x)$
a cui mancano un po' di termini iniziali
(oppure derivo e mi ritrovo una geometrica).

Esercizio

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right)$$

Facile: $f(x)$ è continua in $(0, +\infty)$ anche in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) \geq f_{2x}(x) \downarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

perché è continua ovunque

Domanda: ordine di infinito per $x \rightarrow +\infty$

Brutal mode: $f(x) \sim \int_1^{+\infty} \log \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) dy$

$$\frac{x}{y} = z \leadsto y = \frac{x}{z}$$

$$\leadsto dy = -\frac{x}{z^2} dz$$

$$= \int_x^0 \log(1+z^2) \left(-\frac{x}{z^2} \right) dz$$

$$= x \int_0^x \frac{\log(1+z^2)}{z^2} dz$$

$$\downarrow \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+z^2)}{z^2} dz$$

integrale improprio
convergente

Quindi $f(x) \sim I x$ per $x \rightarrow +\infty$, dove I è il valore dell' integrale improprio, che volendo si calcola.

Rigoroso: confronto serie - integrali.

Dalla regola di Stolz: $I = \pi$.

— 0 — 0 —