

L'ESERCIZIO [Aggiunto dopo video: meglio partire da $n=1$]

Consideriamo la serie di funzioni

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^a}{1+n^2 x^2} \quad x > 0$$

dove $a > 0$ è un parametro reale

Riscaldamento: $f \in C^0((0, +\infty))$ per ogni $a > 0$.

Convergenza puntuale ok grazie ad n^2 .

Spero in una totale in $[A, B]$ per ogni $0 < A < B$

$$|f_n(x)| \leq \frac{B^a}{1+n^2 A^2} \quad \forall x \in [A, B]$$

$\uparrow$
 num + grande
 denom + piccolo

Conclusione grazie a M-test.

Riscaldamento 2: $f \in C^1((0, +\infty))$ per ogni $a > 0$

$$f'_n(x) = \frac{a x^{a-1} (1+n^2 x^2) - 2n^2 x \cdot x^a}{(1+n^2 x^2)^2}$$

$$= \frac{a + (a-2)n^2 x^2}{(1+n^2 x^2)^2} x^{a-1}$$

$$|f'_n(x)| \leq \frac{a + |a-2|n^2 x^2}{(1+n^2 x^2)^2} x^{a-1} \leq \frac{a + |a-2|n^2 B^2}{(1+n^2 A^2)^2} B^{a-1}$$

Conclusione come sopra.

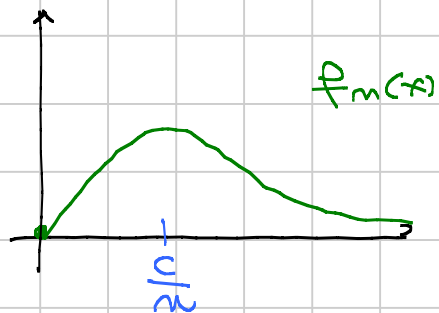
Passaggio intermedio: come sono fatte le $f_n(x)$.

Dipende da a :

→ se $a > 2$ sono monod. cresc. e tendono a $+\infty$

→ se $a = 2$ sono monod. cresc. e tendono a $\frac{1}{n^2}$

→ se $a < 2$ allora prima crescono e poi decrescono a 0



Il p.to di max risolve

$$(2-a)n^2x^2 = a$$

Domanda seria 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

- Se $a > 2$, allora $f(x) \geq f_2(x)$ e questa tende a $+\infty$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Se $a = 2$, se potessi scambiare avrei

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \left(= \frac{\pi^2}{6} \right) \end{aligned}$$

Posso scambiare perché ho la totale in $(0, +\infty)$: infatti

$$\sup_{x>0} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$$

↑ essendo ↑ il sup è il limite a $+\infty$

- Se $a < 2$ e potessi scambiare avrei

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{1+n^2 x^2}}_{=0} = 0$$

Posso scambiare? Mi basta la totale in $[4, +\infty)$

Dallo studio di sopra segue che definitivamente

$$\sup_{x \geq 4} |f_n(x)| = f_n(4) \leadsto \text{totale} \leadsto \text{ok scambio}$$

Domanda seria 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Se posso scambiare ottengo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^a}{1+n^2 x^2} = 0$$

Posso scambiare? Tranquillo per $a \geq 2$.

Provo la totale in $(0,1)$

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{c}{n}\right) = \frac{c^a}{n^a} \frac{1}{1+c^2}$$

↑
per n grande

↑
dipende solo da a

- Per $a > 1$ posso scambiare e quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

- Per $a = 1$ troviamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}$$

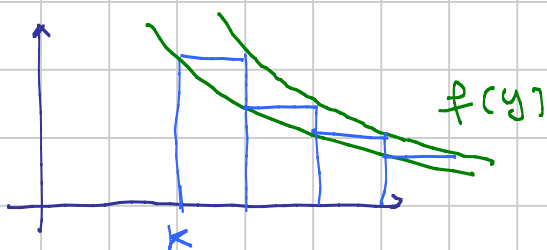
Riprendiamo il confronto serie - integrali di analisi 1

Brutal mode:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2 y^2} dy$$

↑
effetto psicologico
di togliere la x !!

$$= [\arctan(\alpha y)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$



Se $f(y)$ è positiva e decrescente, allora

$$\int_k^{+\infty} f(y) dy \leq \sum_{n=k}^{+\infty} f(n) \leq f(k) + \int_k^{+\infty} f(y) dy$$

Applicato nel vostro caso

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ f(0)}}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy$$

$\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{\pi}{2} \quad \leadsto \text{carabinieri}$$

• $a < 1$ non si scambia, ma si osserva che

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x^{1-a}}}_{\downarrow \frac{1}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x}{1+n^2 x^2}}_{\downarrow \frac{1}{n^2}}$$

Da qui deduco che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ con parte princ. $\frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{1-a}}$

Se volessi fare $\int_0^{2.5} f(x) dx$, saprei che converge perché
ha problemi in $x=0$, ma esponente ≤ 1 .

Esercizio $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Già visto: converge per $x > 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Voglio sapere se converge

$$\int_1^3 f(x) dx$$

Vorrei la parte principale di $f(x)$ in $x \sim 1$.

Brutal mode: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$
 $= \int_1^{+\infty} y^{-x} dy$

$$= \left[\frac{1}{1-x} y^{-x+1} \right]_1^{+\infty}$$

$$= \left[\frac{1}{1-x} \frac{1}{y^{x-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

Questo suggerisce che

$$f(x) \sim \frac{1}{x-1} \quad \text{per } x \rightarrow 1^+$$

e quindi l'integrale improprio diverge.

Rigoroso: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^x} dy = \frac{1}{x-1}$.

Posso usare il confronto perché $\frac{1}{y^x}$ è dec. in y .

Stabilire se converge

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx$$

Già visto che $f(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow +\infty$ (si poteva scambiare) per colpa di $n=1$

Rilancio interessante: $g(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 2^{-x} + 3^{-x} + \dots$

Dico che $g(x) \sim 2^{-x}$ per $x \rightarrow +\infty$

Considero $2^x g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x$

Dico che converge totalmente in $[13, +\infty)$, cosa che si verifica facilmente, da cui posso scambiare e trovare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1$$

per colpa di $n=2$
(gli altri sono 0)

— 0 — 0 —