

Come calcolo la somma di una serie di potenze?

Risposta: spero che sia la serie di Taylor di una funzione nota, cioè del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Sotto opportune ipotesi la serie di Taylor converge alla funzione stessa per gli x per cui converge.

Teorema (criterio di analiticità)

↑ termine misterioso

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $r > 0$, sia f di classe C^∞ in (x_0-r, x_0+r) .
Supponiamo che esista una costante M tale che

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

Allora vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

cioè $f(x)$ è somma della sua serie di Taylor

Dim Siano $S_n(x)$ le somme parziali, cioè i Taylor di ordine n di $f(x)$. Allora per Taylor-Lagrange

$$f(x) = S_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

dove c è p.to misterioso in (x_0-r, x_0+r) e dipende da x

Grazie all'ipotesi

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(x)| &\leq \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} M \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \cdot |x-x_0|^{n+1} \\ &= M \underbrace{\left| \frac{x-x_0}{r} \right|^{n+1}}_{\downarrow 0} \end{aligned}$$

Fissato $x \in (x_0-r, x_0+r)$ abbiamo che $S_n(x) \rightarrow f(x)$.
La conv. è uniforme, anzi totale, sui compatti del tipo

$$[x_0-a, x_0+a] \quad \text{con} \quad 0 < a < r$$

— o — o —

Esempio 1 Le funzioni e^x , $\sin x$, $\cos x$ ricadono nel teorema per ogni $r > 0$.

→ Nel caso di $\sin x$ e $\cos x$

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \leq M_r \frac{n!}{r^n}$$

↑
Per ogni r esiste M_r t.c.

Conseguenza: le serie di Taylor di $\sin x$ e $\cos x$ convergono alle funz. stesse unif. su tutti i compatti di $\mathbb{R}$

Oss. Non convergono unif. su $\mathbb{R}$ (le $S_n(x)$ NON sono mai limitate, mentre $\sin x$ e $\cos x$ lo sono)

→ Nel caso di e^x

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq M_r \frac{n!}{r^n} \quad \forall x \in (-r, r)$$

Conseguenza: anche la serie di Taylor di e^x conv. unif. sui compatti di $\mathbb{R}$, ma non su tutto $\mathbb{R}$ (il sup di $e^x - S_n(x)$ su tutto $\mathbb{R}$ è sempre $+\infty$)

Esempio 2 $\log(1+x)$ è somma della sua serie di Taylor per ogni $x \in (-1, 1]$.

Voglio evitare uso derivate! Parto dalla serie geometrica con ragione $-x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Considero la serie di Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} =: f(x)$

Sappiamo che ha $R=1$ e la sua derivata è

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}$$

↑
teo. scambio

$$\stackrel{\text{shift indici}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

Sappiamo che $f(0)=0$ e $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Quindi $f(x) = \log(1+x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Grazie a Abel o Leibnitz la cosa si estende a $x \in (-1, 1]$.

Oss. Non si estende oltre. Per $x \leq -1$ questo è ovvio pensando a $\log(1+x)$. Per $x > 1$ la funzione limite non avrebbe problemi, ma la serie di Taylor sì!

Esempio 3 $\arctan x$ è somma della sua serie di Taylor per ogni $x \in [-1, 1]$.

Faccio una sola derivata

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Osservo che $R=1$, quindi

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

↑
teo. scambio ↑
geometrica

Come prima $f(0) = 0$ e $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in (-1, 1)$

quindi $f(x) = \arctan x$ per ogni $x \in (-1, 1)$. Per Abel o Leibnitz si estende a $[-1, 1]$.

Oss. $\arctan x$ non ha problemi da nessuna parte in apparenza. In realtà il problema si vede sulla derivata ed è in $\pm i$, che guarda caso distano 1 da 0.

Futuro: il giorno in cui sviluppo $\arctan x$ in $x_0 = 3$, il raggio di convergenza sarà la distanza di 3 da i !!!

Esempio 4 $(1+x)^\alpha$ è somma della sua serie di Taylor in $(-1, 1)$ cioè

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1)$$

↑
 $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Idea: chiamo $\varphi(x)$ il RHS e dimostro che

$$\frac{\varphi(x)}{(1+x)^\alpha} = 1 \quad \forall x \in (-1, 1)$$

La frazione vale 1 per $x=0$. Basta dim. che ha derivata nulla

$$\begin{aligned} \left[\frac{\varphi(x)}{(1+x)^\alpha} \right]' &= \frac{\varphi'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}\varphi(x)}{(1+x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{\varphi'(x)(1+x) - \alpha\varphi(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Mi basta dim. che

$$\varphi'(x)(1+x) = \alpha\varphi(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Ora

$$\begin{aligned} (1+x)\varphi'(x) &= (1+x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right]' && \text{(teo. scambio)} \\ &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n=1}}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \alpha \varphi(x) \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Conto di binomiali (che giustifica il passaggio sopra)

$$(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} =$$

$$= \cancel{(n+1)} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{\cancel{(n+1)}! n!} + n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} [\alpha - n + n] = \alpha \binom{\alpha}{n}.$$

— o — o —