

Dim. del teo. 1

Definisco

$$R := \sup \{ x \geq 0 : \underbrace{C_n x^n}_{\text{contiene almeno } x=0} \text{ è limitato} \}$$

Ci sarebbero 3 casi: $\rightarrow R=0$
 $\rightarrow R=+\infty$
 $\rightarrow R \in (0, +\infty)$ } esercizio

Trattiamo l'ultimo caso. Ci sono due tesi da dim.

- La serie di pot. conv. tot. in $[-A, A]$ per ogni $A < R$

Per caratterizzazione del sup,
trovo $x_0 \in (A, R)$ in cui
 $C_n x_0^n$



è limitata. A quel pto applico il Lemma e ho
la tesi.

- La serie non converge per $|x| > R$ e anzi il suo termine generale non è limitato.

Questo segue univocamente dalla caratt. del sup.

Per ogni $x > R$, questo non ricade nell'insieme in cui il termine gen. è limitato.

Oss.: se ci fosse $x < -R$ in cui il termine generale è limitato, allora lo sarebbe pure in $-x > R$

Ci sta sotto che

$$C_n x^n \text{ è limit. } \Leftrightarrow C_n (-x)^n \text{ è limit.}$$

— o — o —

Dim. tes. 2 Sia $L := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$

Ci sarebbero 3 casi, ma facciamo quello vero, cioè

$$L \in (0, +\infty). \quad (\text{gli altri 2 sono esercizi})$$

Devo dimostrare 2 cose

- Per $|x| < \frac{1}{L}$ ho convergenza. Per il solito Lemma basta dim. che

$$c_n x^n$$

è limitato.

Dico addirittura che tende a 0. Applico criterio radice

$$\sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|c_n|}$$

$$\text{Ora } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot L < 1$$

$$\leadsto |c_n x^n| \rightarrow 0 \leadsto \text{è limitato}$$

- Per $|x| > \frac{1}{L}$ ho che $c_n |x|^n$ non è limitato.

Questo è semplice ma non banale (non posso usare il criterio della radice).

Per una delle tante caratt. del $\limsup$, esiste $n_k \rightarrow +\infty$ t. c.

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \longrightarrow L \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Considero

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \cdot |x|^{n_k} \longrightarrow |x| \cdot L > 1$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad M \quad |x| \cdot L \\ | \quad | \quad | \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Quindi def. } \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \cdot |x|^{n_k} \geq M > 1$$

Ma allora

$$|c_n| \cdot |x|^{n_k} \geq M^{n_k}$$

$\downarrow$
+oo

Quindi $|c_n| \cdot |x|^n$ non è limitata.
— o — o —

Lemma di Abel (Lemma di sommazione parziale)

Siano a_n e b_n due successioni. Siano A_n le somme parziali degli a_n , cioè $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Allora per ogni $m > n$ vale

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = A_m b_{m+1} - A_n b_{n+1} - \sum_{k=n+1}^m A_k (b_{k+1} - b_k)$$

Dim. telescopica:

$$A_m b_{m+1} - A_n b_{n+1} = \sum_{k=n+1}^m A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=n+1}^m A_k b_{k+1} - A_k b_k}_{A_k (b_{k+1} - b_k)} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^m A_k b_k - A_{k-1} b_k}_{b_k (A_k - A_{k-1})}$$

$b_k a_k$

Dim. teo. 3

Passo 1 Semplificazioni

- Posso assumere $x = R$ (se fosse $x = -R$ pongo $x = -y$ e scarico i - sui coeff.)
- Posso assumere $R = 1$ (altrimenti pongo $x = Ry$ e scarico le potenze di R sui coeff.)
- Posso assumere che $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (la serie per $x=1$) converga a 0 (altrimenti cambio c_0).

Achtung! Non so se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ converge !!!

Passo 2 Chiamo i coeff. an invece di c_n .

Passo 3 Dimostro che $\sum a_n x^n$ conv. unif. in $[0, 1]$ (in generale la totale è falsa)

Dimostro che è di Cauchy (la succ. delle somme part.)

Applico Abel: per ogni $m > n$ vale

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m a_k x^k &= A_m x^{m+1} - A_n x^{n+1} - \sum_{k=n+1}^m A_k (x^{k+1} - x^k) \\ &= A_m x^{m+1} - A_n x^{n+1} - (x-1) \sum_{k=n+1}^m A_k x^k \end{aligned}$$

Metto i valori assoluti e trovo

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &\leq |A_m| \cdot |x|^{m+1} + |A_n| \cdot |x|^{n+1} \\ &\quad + (1-|x|) \sum_{k=n+1}^m |A_k| \cdot |x|^k \end{aligned}$$

$x \in [0, 1] \rightarrow$

Avendo supposto che $\sum a_n = 0$, sappiamo che $\lambda_n \rightarrow 0$.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$

- Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|\Delta u| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$

- Per ogni $m > n \geq m_0$ il conto prec. mi dice che

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &\leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon + (1-x)\frac{1}{4}\varepsilon \sum_{k=n+1}^m x^k \leq \frac{3}{4}\varepsilon \\ &\quad (1-x)\frac{1}{4}\varepsilon \frac{x^k}{1-x} \\ &\leq \frac{1}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

Quindi è di Cauchy $(S_n(x))$ e dunque conv. unif. su $[0, 1]$.

Esercizio Supponendo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty$
 — 0 — 0 —

Dom. teo. 4 Consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

Dico che ha lo stesso raggio di conv. di quella iniziale.

Se lo dim. ho finito perché su ogni $(-A, A)$ con $A < R$ valgono i teoremi di scambio della derivata.

A meno di shift degli indici, devo calcolare

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot |c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|c_n|}) = L$$

grazie al fatto che uno dei 2 è un limite.

Stessa cosa se faccio derivata 20-esima
— 0 — 0 —

Oss. Il raggio resta lo stesso, ma il comportamento
per $x = \pm R$ può cambiare (solo in peggio)

Fatto generale: se $\sum n a_n$ converge, allora $\sum a_n$ conv.

$$\sum a_n = \sum \underbrace{n a_n}_{\substack{\downarrow \\ \text{succ. con} \\ \text{primitiva} \\ \text{limitata}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ \text{tende a 0} \\ \text{decrescendo}}}$$

↪ criterio di Dirichlet.