

SERIE DI POTENZE

Una serie di potenze è una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

↑
coefficienti
(numeri reali)

(brutalmente: polinomio di grado infinito)

Domande : → per quali x converge ?
→ in che senso converge ?
→ a che cosa converge ?

Teorema 1 (Raggio di convergenza)

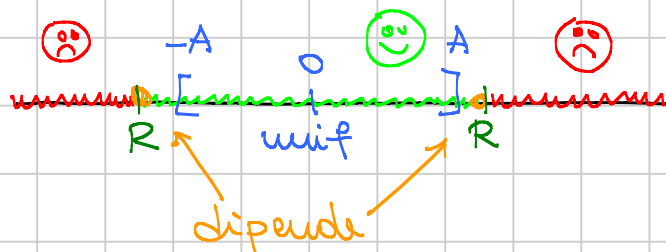
Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ tale che

(i) se $|x| < R$ allora la serie converge, anzi converge assolutamente, anzi converge totalmente (dunque unif.) su tutti gli intervalli del tipo $[-A, A]$ con $A < R$
↑
stretto

(ii) se $|x| > R$ allora la serie non converge, anzi non verifica nemmeno la cond. nec., anzi il termine generale non è nemmeno limitato

(iii) se $|x| = R$, cioè $x = \pm R$, allora BOM (indipendentemente su $\pm R$ può avere comp. diversi).

Riassunto



- Oss.
- 1 - Per $x=0$ una serie di potenze converge sempre e ha come somma c_0 .
 - 2 - Se $R=0$ la serie converge solo per $x=0$.
 - 3 - Se $R=+\infty$ la serie conv. sempre e conv. unif. (anzi totalmente) sui compatti.

Teorema 2 (Formula per il calcolo di R)

Sia
$$L := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora $R = \frac{1}{L}$ (con ovvio significato se $L=0$ e $L=+\infty$)

Teorema 3 (Abel)

Supponiamo che una serie di potenze converga anche per $x=R$ (non sarebbe obbligata).

Allora converge unif. in $[0, R]$ (e quindi anche in $[-A, R]$ con $A < R$)

Stesso discorso in $x = -R$.

(In particolare: se converge in $x = \pm R$, allora conv. unif. in tutto $[-R, R]$)

Teorema 4 (Ulteriore regolarità)

La somma di una serie di potenze $\nearrow$ che indico con $f(x)$ è una funzione C^∞ in $(-R, R)$ e le sue derivate si calcolano "derivando la serie".
In particolare

$$f^{(k)}(0) = k! c_k$$

Una serie di pol. è la serie di Taylor di se stessa

Esempio 1 Vari comportamenti al bordo

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$(-1, 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$[-1, 1)$$

↑
Leibnitz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$[-1, 1]$$

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$

Si tratta di una geometria

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Basta raccogliere x^k .

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad C_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Converge in $(-1, 1]$ per analisi 1 $\leadsto R=1$

La conv. è unif. in $[0, 1]$

→ Motivo 1: Abel

→ Motivo 2: serie alla Leibnitz

[Non si possono usare teo. di monotonia perché occorre già sapere che il limite è continuo].

Per il teo. 4 so che la somma $f(x)$ è di classe C^∞ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} \\ &\quad \uparrow \text{teo. scambio} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &\quad \uparrow \text{shift involta} \\ &= - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

APERTO

$$\forall x \in (-1, 1)$$

Quindi $f(x)$ è la primitiva di $-\frac{1}{1+x}$ che si annulla per $x=0$, quindi

$$f(x) = -\log(1+x) \quad \forall x \in (-1,1)$$

Per Abel ho conv. unif. fino ad 1, quindi $f(x)$ è continua fino ad 1, quindi

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\log(1+x) = -\log 2$$

$$\overset{''}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}}$$

Ho così dimostrato che

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \log 2$$

Esempio 4 Dimostriamo che

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Considero la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- Converge per $x \in (-1, 1]$ (quindi $R=1$)
 $\uparrow$ in realtà pure in -1 (è disponi 😊) dopo video
- Converge unif. in $[0, 1]$ per Abel o Leibnitz, quindi $f(x)$ è continua in $[0, 1]$.
- Per $x \in (-1, 1)$ calcolo la derivata per serie

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

Quindi $f(x)$ è la primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$ con $f(0)=0$, quindi

$$f(x) = \arctan x \quad \forall x \in (-1,1)$$

• Per continuità lo stesso vale per $x=1$.

Esempio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{1}{5^n}$

Voglio calcolare la somma.

• Pongo $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} x^n$ (sperando poi di mettere $x = \frac{1}{5}$)

• Analisi 1: converge $\forall x \in (-1,1)$

• Per il teo 4 è di classe C^∞ in $(-1,1)$.

• Cerco di farla diventare una geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2-2}{n+2} x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\frac{1}{1-x}} - 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}}_{g(x)}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{x^2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}}_{\varphi(x)} \quad \forall x \in (0,1)$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{e } \varphi(0)=0$$

Quindi

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \int_0^x \frac{t-1+1}{1-t} dt = -x - \log(1-x)$$

Da qui si conclude

$$\leadsto g(x) = - \frac{x + \log(1-x)}{x^2}$$

$\forall x \in (0,1)$
per simmetria, ma
non ci sono prob. numerico
in $x=0$

$$\leadsto f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x + \log(1-x)}{x^2}$$

• Non resta che sostituire $x = \frac{1}{5}$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{4} - 5 - 25 \log \frac{4}{5}$$

Idea Cercare di portare una serie di potenze verso geometria
che o serie di Taylor di funzioni note.