

SERIE DI FUNZIONI

Rinviare

Setting: S insieme, $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ succ. di funz.

Una serie di funzioni si presenta come

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in S$$

Fissato $x \in S$, diventa una serie di numeri

Costruisco le somme parziali

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e dico che la serie conv. punt. / unif. a $S_\infty(x)$ se

$$S_n(x) \rightarrow S_\infty(x)$$

puntualmente / unif.

Operativamente: $\rightarrow$ la conv. punt. è esercizio di Analisi 1
(basta pensare x come un parametro) $\rightarrow$ la conv. unif. è un grosso problema se uno non conosce esplicitamente $S_\infty(x)$.Def. (convergenza TOTALE (NORMAL convergence))Una serie si dice totalmente convergente se converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$$

numeri reali (event. $+\infty$) e quindi questa converge o diverge

Def. (M-test di Weierstrass) Una serie soddisfa questo test se esiste una succ. $\{M_n\}$ di numeri reali tali che

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$$

Lemma (quasi ovvio) Una serie è totalmente conv. se e solo se verifica il M-test.

Dim $\Rightarrow$ Basta prendere $M_n := \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$

$\Leftarrow$ Per ogni n vale $\sup \{ \dots \} \leq M_n$ e quindi la serie dei sup converge. — o — o —

Teorema Per una serie di funzioni vale

conv. totale $\Rightarrow$ conv. unif. $\Rightarrow$ conv. puntuale
 $\uparrow$
fatto generale per
le succ. applicato a $S_n(x)$

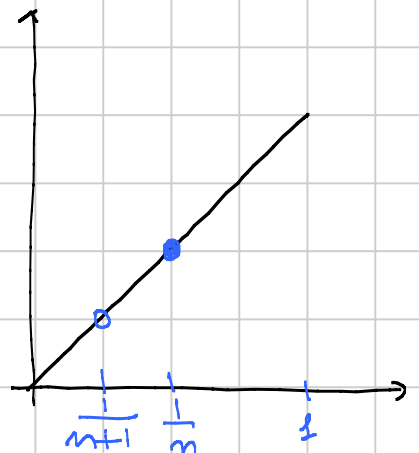
Achtung! Non valgono i viceversa, quindi può esserci conv. unif. senza conv. totale.

Esempio $S = [0, 1]$ $S_\infty(x) := x$

Poniamo $f_n(x) := \begin{cases} x & \text{se } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Non c'è conv. tot. perché $\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = \frac{1}{n}$

$S_\infty(x) - S_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e $S_\infty(x) - S_n(x) \rightarrow 0$ unif.



Prop. (Cond. nec. per conv. unif. di una serie)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ conv. unif.} \Rightarrow \underbrace{\sup \{ |f_n(x)| : x \in S \} \rightarrow 0}_{\text{cond. necessaria per la conv. della serie dei sup}}$$

Dim. Stessa di Analisi 1

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{\infty}(x) - S_{\infty}(x) & & \end{array}$$

Deduciamo che $f_n(x) \rightarrow 0$ uniformemente, e questo è equivalente alla tesi.

Dim. (che convergenza totale $\Rightarrow$ conv. unif.)

Dimostriamo intanto che conv. tot. $\Rightarrow$ conv. puntuale assoluta

Fissato $x \in S$ vale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$$

da cui la conclusione per confronto.

Questo ci permette di definire $S_{\infty}(x)$. Ora per Analisi 1 sappiamo che

$$\begin{aligned} S_{\infty}(x) - S_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) && \text{e quindi} \\ |S_{\infty}(x) - S_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \sup \{ |f_k(x)| : x \in S \}}_{\text{non dipende da } x} \end{aligned}$$

Rigorosamente:

- mi viene dato $\varepsilon > 0$
- scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $RHS \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$ (uso hp)
- ottengo che

$$|S_\infty(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in S$$

e questo dice che

$$S_n \xrightarrow{\quad} S_\infty \quad \text{unif. in } S.$$

Teorema (serie "Leibnitziana") Supponiamo di avere una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x) \quad x \in S.$$

Supponiamo che

- (i) $\varphi_n(x) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in S$ (segno alterno)
- (ii) $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in S$.

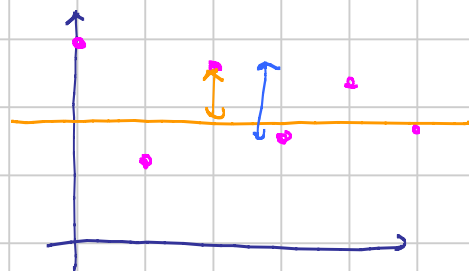
Allora

la serie converge unif. $\Leftrightarrow \sup \{ |\varphi_n(x)| : x \in S \} \rightarrow 0$

Dim. $\Rightarrow$ Praticamente è la cond. nec. di prima

$\Leftarrow$ La puntuale è il Leibnitz classico. Serve la unif.
Dalla dim. di Analisi 1 segue che

$$|S_\infty(x) - S_n(x)| \leq \varphi_{n+1}(x)$$



Ora basta fare il sup a dx e sx
(e ripassare la dim. di analisi 1 :)).

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$

Teorema (Convergenza totale in spazi di Banach)

Sia V uno sp. di Banach (vettoriale con norma che lo rende completo).

Sia $\{v_m\} \subseteq V$ una succ. di vettori.

Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| \text{ conv.}}_{\text{serie di numeri in } \mathbb{R}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ conv.}}_{\text{serie di vettori in } V}$$

Dim. Pongo

$$S_m := \sum_{k=0}^m v_k$$

$$\hat{S}_m := \sum_{k=0}^m \|v_k\|$$

(cudici sistemati dopo video)

Per ogni $m > n$ vale

$$\|S_m - S_n\| = \|v_{n+1} + \dots + v_m\|$$

$$\leq \|v_{n+1}\| + \dots + \|v_m\|$$

$$= |\hat{S}_m - \hat{S}_n|$$

$\uparrow$ superfluo

Ora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| \text{ conv.} \Rightarrow \{\hat{S}_m\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R}$$

disug. precedente $\Rightarrow \{S_m\}$ è di Cauchy in V

completezza $\Rightarrow S_m$ converge in V ad un certo S_∞

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge in } V.$$

— 0 — 0 —

Osservazione Consideriamo

$$V := \text{Bounded}(S, \mathbb{R})$$

funzioni $f: S \rightarrow \mathbb{R}$
limitate

Questo è uno sp. di Banach rispetto alla norma

$$\|f\| := \sup \{|f(x)| : x \in S\}.$$

La convergenza uniforme è la conv. rispetto a questa norma.

La conv. totale è la conv. della serie delle norme.

Quindi conv. tot. $\Rightarrow$ conv. unif. è anche una conseguenza del teo. astratto precedente. Questo fornisce una def. alternativa e spiega la terminologia

normed convergence = conv. delle norme.

Oss. Il teorema astratto vale in particolare con $V = \mathbb{C}$.

Oss. I discorsi di questa pagina valgono per

$\text{Bounded}(S, W)$

$\uparrow$ Banach

(verificare).