

Esempio 1 $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

Converge unif. a 0 su tutto $\mathbb{R}$

$$|f_n(x) - \underbrace{f_\infty(x)}_0| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_\infty(x)| \rightarrow 0.$

Esempio 2 $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x > 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \\ +\infty & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Converge puntualmente in $[0, +\infty)$.

La convergenza non può essere unif. in $[0, +\infty)$, perché altrimenti il limite $f_\infty(x)$ sarebbe continuo.

La conv. è unif. su tutte le semirette $[a, +\infty)$ con $a > 0$ (e quindi anche sui cpt $\subseteq (0, +\infty)$)

$$\sup_{x \geq a} \underbrace{|f_n(x) - f_\infty(x)|}_0 = \sup_{x \geq a} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a} \rightarrow 0$$

Nota bene: f_n non conv. unif. a f_∞ in $(0, +\infty)$

$$\sup_{x > 0} \underbrace{|f_n(x) - f_\infty(x)|}_0 = \sup_{x > 0} \frac{1}{n^x} = 1 \not\rightarrow 0.$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $f_n(x) = mx e^{-nx}$

Per $x < 0$ tende a $-\infty$

Per $x \geq 0$ tende a $f_\infty(x) \equiv 0$

Quindi conv. punt. in $[0, +\infty)$

La conv. non è unif. in $[0, +\infty)$ perché



$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f_\infty(x)| = \sup_{x \geq 0} mx e^{-nx} = \sup_{y \geq 0} ye^{-y} = m > 0$$

(Devo calcolare il sup a n fisso e fare il limite per $n \rightarrow +\infty$ del sup)

Moralmente: si tratta della funzione ye^{-y} schiacciata verso l'origine, quindi il sup è lo stesso $\forall n$.

Si ha conv. uniforme su tutte le semirette $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

Fissato $a > 0$, per n abbastanza grande il sup sarà il valore in a , quindi

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f_\infty(x)| = na e^{-na} \rightarrow 0 \text{ per } a > 0.$$

Esempio 4 $f_n(x) = \frac{nx}{x+n^2} \quad x \geq 0$

$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \equiv 0$ puntualmente in $[0, +\infty)$

Per decidere se è uniforme, studio la funzione

$$f'_n(x) = \frac{\cancel{nx} + n^3 - \cancel{nx}}{(x+n^2)^2} \geq 0, \text{ quindi}$$

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f_\infty(x)| = n \rightarrow 0$$

↑
limite
all'infinito

Quindi non c'è conv. unif. in $[0, +\infty)$.

C'è invece conv. unif. in $[0, a]$ per ogni $a > 0$ e quindi anche sui cpt.

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(a) = \frac{na}{a+n^2} \rightarrow 0$$

Alternativa: vale il teorema di Weierstrass rispetto ad x .

Esempio 5 Sia $p_n(x)$ una succ. di polinomi di grado ≤ 3 . Supponiamo che converga puntualmente in 4 pti a scelta, ad esempio

$$p_n(2018) \quad p_n(0) \quad p_n(\pi) \quad p_n(-\sqrt{3})$$

Allora

$p_n(x)$ conv. unif. sui cpt
ad un limite $p_\infty(x)$ che è ancora un polinomio di grado ≤ 3 .

Idea: conv. puntuale in 4 p.ti
 $\Updownarrow$
conv. dei coefficienti
 $\Updownarrow$
conv. unif. sui cpt.

Dim 2ª implicazione

$$p_n(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 a_∞ b_∞ c_∞ d_∞

$$|p_n(x) - p_\infty(x)| \leq \underbrace{|a_\infty - a_n|}_{\downarrow 0} + \underbrace{|b_\infty - b_n|}_{\downarrow 0} \cdot |x| + \underbrace{|c_\infty - c_n|}_{\downarrow 0} \cdot x^2 + \dots$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
limitato sui cpt. limitato sui cpt.

Dim. bovinia 1a implicazione VANDERMONDE

Noti i valori di un pol. di grado ≤ 3 in 4 pti, posso ricavare i coeff. invertendo una matrice.

Quando i termini noti convergono, convergono le sol., cioè i coeff.

Dim. alternativa Sia V lo sp. dei pol. di grado ≤ 3 .

Dato $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ e dato $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto, posso
 $\uparrow$
con almeno 4 pti

$$m_1(p) := \max \{ |a|, |b|, |c|, |d| \}$$

$$m_2(p) := \max \{ |p(x)| : x \in K \}$$

$$m_3(p) := \max \{ |p(x)| : x \in \{2018, 0, \pi, -\sqrt{3}\} \}$$

Si osserva che

- m_1, m_2, m_3 sono norme in V
- V ha dim. finita, quindi tutte le norme sono equiv.
- le 3 convergenze citate sopra sono le convergenze rispetto alle 3 norme.

Nel verificare che m_2 ed m_3 sono norme serve che un polinomio che si annulla in almeno 4 pti è $\equiv 0$ se ha grado ≤ 3 .

Esempio 5 Sia (X, d) metrico cpt. Siano $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ equilipschitziane, cioè

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X^2$$

$\uparrow$
stesso L .

Se $f_n \rightarrow f_0$ puntualmente, allora $f_n \rightarrow f_0$ unif.

Seve compatto: $f_n(x) = \frac{x}{n}$ $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $L=1$

Idea: $f_n(x) - f_\infty(x)$ è piccola in ogni p.to per n grande, ma quanto grande è x-dependent.

Rigorosamente

- dimostro che $f_\infty(x)$ è L-lip., quindi $|f_n - f_\infty|$ è $2L$ -lip.
- Dato $\varepsilon > 0$ scelgo una $\frac{\varepsilon}{2L}$ rete in $\mathbb{X}$: $x_1, \dots, x_k$
- Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x_i) - f_\infty(x_i)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall i=1, \dots, k$$

Dico che quel valore di n_0 va bene con ε per ogni x

Idea: dato $x \in \mathbb{X}$ trovo x_i t.c. $d(x, x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2L}$ e quindi

$$|f_n(x_i) - f_n(x)| \leq L d(x, x_i) \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Concludo con una triangolare (forse era meglio avere 4 al denominatore)

— o — o —

Oss. Basta la totale limitatezza 😊.