

Teorema di scambio dell'integrale

Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni e sia $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $[a, b]$

(ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x)$ è integrabile alla Riemann / Darboux in $[a, b]$ (integrale proprio)

Allora

(1) f_∞ è int. alla Riemann in $[a, b]$

(2) vale che

$$\int_a^b f_\infty(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

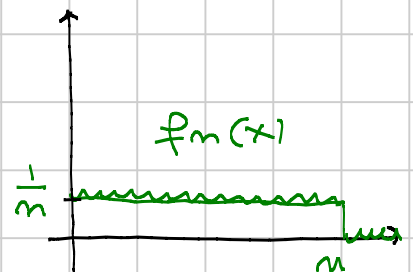
(L'integrale del limite è il limite degli integrali)

Achtung! Come visto in precedenza, la conv. puntuale non basta.

Inoltre serve che gli int. siano propri, altrimenti l'unif. conv. non basta

Ad esempio

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } x \in [0, n] \\ 0 & \text{per } x > n \end{cases}$$



Allora $f_n(x) \rightarrow 0$ unif. in $[0, +\infty)$, ma

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \rightarrow \int_0^{+\infty} f_\infty(x) dx$$

$\begin{matrix} 1 & & 0 \end{matrix}$

Dim. Tentativa

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_\infty(x) - \int_a^b f_n(x) \right| &= \left| \int_a^b (f_\infty(x) - f_n(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b \underbrace{|f_\infty(x) - f_n(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande}} dx \\ &\leq \varepsilon (b-a) \end{aligned}$$

Forse può andare bene, ma PRIMA devo dim. che $f_\infty(x)$ è integrabile.

Step 1 Dimostro che f_∞ è integrabile, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esistono step function φ e ψ in $[a, b]$ tali che

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq f_\infty(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b] \\ \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \forall x \in [a, b], \forall n \geq n_0$$

- Uso l'integrabilità di $f_{n_0}(x)$ e trovo φ_0 e ψ_0 step func. tali che

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &\leq f_{n_0}(x) \leq \psi_0(x) \quad \forall x \in [a, b] \\ \int_a^b (\psi_0(x) - \varphi_0(x)) dx &\leq \frac{1}{2} \varepsilon \end{aligned}$$

- "Alzo ψ e abbasso φ ", cioè pongo

$$\psi(x) := \psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\varphi(x) := \varphi_0(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad "$$

- Verifico che φ e ψ vanno bene per $f_\infty(x)$.
Ci sono due verifiche

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx = \int_a^b \underbrace{(\psi_0(x) - \varphi_0(x))}_{\frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}_{\frac{1}{2}\varepsilon} dx$$

$$\leq \varepsilon. \quad \text{☺}$$

Verifico che $f_\infty(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$:

$$f_\infty(x) = \underbrace{f_{n_0}(x)}_{\downarrow} + \underbrace{f_\infty(x) - f_{n_0}(x)}_{\downarrow}$$

$$\leq \psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

Allo stesso modo ottengo $f_\infty(x) \geq \varphi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Step 2 Ora la brutta copia funziona. Se voglio fare il fine: per ogni $\varepsilon > 0$ scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \geq n_0$$

e con i passaggi della brutta ottengo

$$\left| \int_a^b f_\infty(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

— 0 — 0 —

Estensione Lo stesso enunciato vale per integrali multipli con $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ intendendo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile e limitato

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f_{\infty}(x) dx$$

sotto ipotesi di conv. unif. in Ω ,
— o — o —

Teorema di scambio della derivata

Siano $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ (potrei prenderlo chiuso ma dovei interpretare la derivata agli estremi)
una succ. di funzioni.

Supponiamo che

(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione f_n è di classe C^1 in (a,b)

(ii) esiste $g_{\infty}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f_n' \rightarrow g_{\infty} \quad \text{unif. in } (a,b) \quad (\text{conv. unif. delle derivate})$$

(iii) esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f_n(x_0) \rightarrow a_{\infty} \quad (\text{conv. puntuale delle funz. in un solo punto})$$

Allora, posto

$$f_{\infty}(x) := a_{\infty} + \int_{a_{\infty}}^x g_{\infty}(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

si ha che

(1) f_{∞} è di classe C^1 in (a,b) e $f_{\infty}' = g_{\infty}$

(2) $f_n \rightarrow f_{\infty}$ unif. in (a,b)

(la derivata del limite è il limite delle derivate)

Dim. (1) Osservo che g_∞ è continua in (a,b) essendo
 limite unif. delle f_n' che sono continue.
 Quindi $f_\infty \in C^1$ per teo. fond. calcolo integrale

(2) Osservo che per ogni $x \in (a,b)$ vale

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t) dt \quad (\text{teo. fond. calc. int.})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$a_\infty + \int_{x_0}^x g_\infty(t) dt = f_\infty(x)$$

Per passare al limite ho usato l'ipotesi (iii) sul primo
 termine, ed il teo. di scambio dell'integrale sul secondo
 termine dopo aver osservato che

$$f_n' \longrightarrow g_\infty \quad \text{unif. in } [x_0, x]$$

(fatto generale: se $\varphi_n \rightarrow \varphi_\infty$ unif. in A , allora
 $\varphi_n \rightarrow \varphi_\infty$ unif. in B per ogni $B \subset A$)

Finora ho dim. solo che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ puntualmente.
 Per averla uniforme devo scrivere

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| = \left| a_\infty + \int_{x_0}^x g_\infty(t) dt - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x f_n'(t) dt \right|$$

$$\leq |a_\infty - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^x |g_\infty(t) - f_n'(t)| dt$$

$$\leq \underbrace{|a_\infty - f_n(x_0)|}_0 + \int_a^b \underbrace{|g_\infty(t) - f_n'(t)|}_0 dt$$

Quindi per n grande il LHS è piccolo (volip, da x).

Corollario Se supponiamo

(1) $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente

(2) $f_n' \rightarrow g_\infty$ unif.

allora

$\rightarrow f_\infty$ è derivabile e $f_\infty' = g_\infty$

$\rightarrow f_n \rightarrow f_\infty$ pure uniformemente.

Oss. In dimensione più alta vale lo stesso per ogni derivata parziale, cioè se

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ punt. in Ω

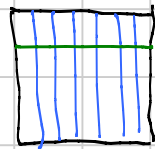
(ii) $\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \rightarrow g_\infty$ unif in Ω

← aperto
↙

Allora $\frac{\partial f_\infty}{\partial x_i}$ esiste ed è proprio g_∞ .

Dim Restringersi alle varie rette in direzione x_i

Oss. L'enunciato con ipotesi di conv. in un solo punto va rivisto componendo convergenza in ogni pto di ogni retta



Esercizio Nelle ipotesi del corollario, dimostrare la convergenza unif. dei rapp. increment., cioè

$$\frac{f_n(x_0 + \Delta) - f_n(x_0)}{\Delta} \xrightarrow{\text{unif}} \frac{f_\infty(x_0 + \Delta) - f_\infty(x_0)}{\Delta}$$

dove definiti. A quel p.to usare il teo. scambio dei limiti per $\Delta \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —