

TEOREMI DI SCAMBIO

- del limite
- dell'integrale
- della derivata

Teo. scambio del limite

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di accumulazione di A (con piccole modifiche vale anche per $x_0 = \pm\infty$). Sia $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funz., sia $f_\infty: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A
- (ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$$

Allora

(1) esiste $l_\infty := \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) = l_\infty$ (il limite della funzione limite è limite dei limiti)

Oss. Possiamo scriverlo come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

Achtung! Serve la conv. unif., altrimenti è falso.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \right) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \right)$$

$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$
 $\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 1$

$x^n \not\rightarrow 0$ unif. in $[0,1)$ ma solo puntualmente

Dim. Step 1 Dimostro che $\{l_n\}$ è di Cauchy, da cui
l'esistenza di l_∞ .

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Per def. di conv. unif. trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in A \quad \forall n \geq n_0$$

- Osservo che per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $m \geq n_0$ vale

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_\infty(x)| + |f_\infty(x) - f_m(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

- Passando al limite per $x \rightarrow x_0$ trovo

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \varepsilon \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ |l_n - l_m| &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0. \end{aligned}$$

Step 2 Dimostro che $\lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) = l_\infty$

Mi serve che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A] \setminus \{x_0\} \quad \text{vale}$$

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq \varepsilon$$

Brutta copia

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq |f_\infty(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l_\infty|$$

piccolo per $n \gg 1$
piccolo per $x \sim x_0$
piccolo per $n \gg 1$

Facciamo le cose in ordine.

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Fisso $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|l_n - l_\infty| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

• Fisso $n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall n \geq n_1, \forall x \in A$

• Scelgo un qualunque $n_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_2 \geq n_0, n_2 \geq n_1$, e prendo $\delta > 0$ t.c.

$$|f_{n_2}(x) - l_{n_2}| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$$

• Per quello specifico valore di n_2 scrivo la triangolazione della brutta copia e ottengo

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq \underbrace{\frac{3}{4} \varepsilon}_{\text{--- o ---}} \leq \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}.$$

Oss. Nella dim. di (2) la scelta di n è un passo necessario per avere δ , che è l'unica cosa che ci interessa.

--- o --- o ---

Stesso teorema in variante metrica

$\mathbb{X}$ sp. metrico, $A \subseteq \mathbb{X}$, $x_0 \in \mathbb{X}$ p.to di acc. per A

$f_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, $f_\infty: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.

Supponiamo $\mathbb{Y}$ COMPLETO.

Allora vale lo scambio come sopra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)}_{l_n}$$

$\uparrow$
limiti in $\mathbb{Y}$

Dim. (1) $\{l_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{Y}$, che è completo
 (2) triangolare finale come sopra.

Oss. Su $\mathbb{X}$ non serve davvero una metrica: basta una topologia o una nozione di convergenza

Prop. (Doppio scambio)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ una succ., sia $\{x_n\} \subseteq A$ una succ., sia $f_\infty: A \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_\infty \in A$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A

(ii) $x_n \rightarrow x_\infty$ (limite sta in A)

(iii) f_∞ continua in x_∞ .

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = f_\infty(x_\infty).$$

Dim. Brutta copia:

$$|f_\infty(x_\infty) - f_n(x_n)| \leq |f_\infty(x_\infty) - f_\infty(x_n)| + |f_\infty(x_n) - f_n(x_n)|$$

piccolo se $x_n \sim x_\infty$
piccolo per C.U.

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$
 $\forall x \in A$

• Scelgo $\delta > 0$ t.c. $|f_\infty(x_\infty) - f_\infty(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$
 $\forall x \in (x_\infty - \delta, x_\infty + \delta)$

• Scelgo $n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $|x_\infty - x_n| < \delta \quad \forall n \geq n_1$

Mettendolo tutto insieme trova

$$|f_\infty(x_\infty) - f_n(x_n)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$$

Esercizio Trovare controesempi quando la convergenza è solo puntuale, oppure quando è unif. ma $f_\infty(x)$ non è continua.

Corollario Se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A , e tutte le f_n sono continue, allora f_∞ è continua, quindi "limite uniforme di funzioni continue è continuo".

Dim. Prendo un qualunque $x_0 \in A$ e ho che

$$\begin{aligned} f_\infty(x_0) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) && \text{(qui basta puntuale)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) && \text{(usato } f_n \text{ cont. in } x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) && \text{(usato teo. scambio)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x). && \text{(usato } f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)) \end{aligned}$$

— o — o —

Interpretazione astratta della conv. uniforme

$A \subseteq \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ Pongo

$$d(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in A \}$$

Questa è una distanza se mi restringo alle funzioni limitate.

Indipendentemente dall'essere limitate, vale che

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } A \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n, f_\infty) = 0.$$

Il discorso vale più in generale in spazi metrici

Def. (X, d_X) e (Y, d_Y) metrici. Poniamo

$$\mathcal{Y}_b(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \text{ limitata}\}.$$

↑ bounded

Date f e g in $\mathcal{Y}_b(X, Y)$ si pone

$$d(f, g) := \sup \{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Valgono i seguenti fatti

- $d(f, g)$ è una distanza
- $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $X \Leftrightarrow d(f_n, f_\infty) \rightarrow 0$
- $\mathcal{Y}_b(X, Y)$ con la distanza $d(f, g)$ è uno spazio metrico ed è completo se e solo se lo è Y

[Se $\{f_n\}$ è succ. di Cauchy di funzioni, allora per ogni $x \in X$ si ha che $\{f_n(x)\}$ è succ. di C. di el. di Y , quindi $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ per ogni $x \in X$ e si tratta di dim. che il limite è uniforme].

- Se X è compatto e Y è completo, allora $C^0(X, Y)$, rispetto alla distanza $d(f, g)$, è uno sp. metrico completo.

[X comp. garantisce che le funz. cont. sono limitate, e il teo. scambio garantisce la continuità del limite].

— o — o —