

Lemma Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , $x_0 \in \Omega$ (aperto) t.c. $g(x_0) = 0$.

Supponiamo che esista $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. x_0 è p.to di minimo per (minimo su tutto Ω)

$$\Phi(x) := f(x) - \lambda g(x)$$

(essere stazionario vuol dire verificare $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$)

Allora x_0 è p.to di min. per $f(x)$ ristretta al vincolo $V := \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$

Dim Per ogni altro $x \in V$ vale

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ g(x)=0}}{f(x)} = f(x) - \lambda g(x) \geq f(x_0) - \lambda g(x_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ g(x_0)=0}}{f(x_0)} = f(x_0).$$

x è p.to di min. per Φ .
— o — o —

Oss. La cond. precedente è sufficiente affinché x_0 sia di min. in V , ma non necessaria (farsi degli esempi).

Progetto di esercizio Che cosa diventa per i minimi vincolati la cond. nec./suff. sulla Hf ?

(Hint: nasce una cond. di positività sull'ortogonale di $\nabla g(x_0)$, cioè sulla giacitura dello spazio tangente a V).

Esercizio Generalizzare Lemma prec. al caso di più moltiplicatori.

— o — o —

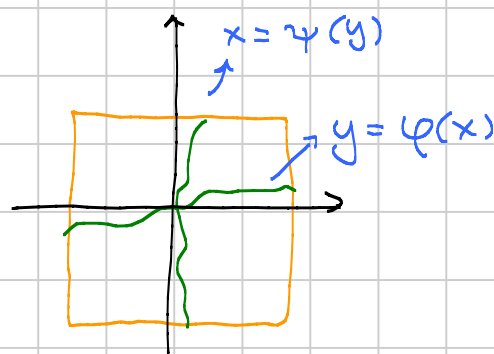
Esempio 1 Sia $f(x,y) := \arctan(xy) + x^2 \sin y + y^3 - x^6$

Capire come è fatto l'insieme $f(x,y) = 0$ in un intorno di $(0,0)$.

Problema: $\nabla f(0,0) = (0,0) \leadsto$ niente teo. funz. impl.

Brutal mode: $f(x,y) \sim xy$, quindi ci aspettiamo 2 curve che si incrociano

Oss. Ogni funzione di classe C^2 con $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e $Hf(0,0)$ con autovalori $+$ e $-$ si può portare in questa situazione con una trasformazione affine.



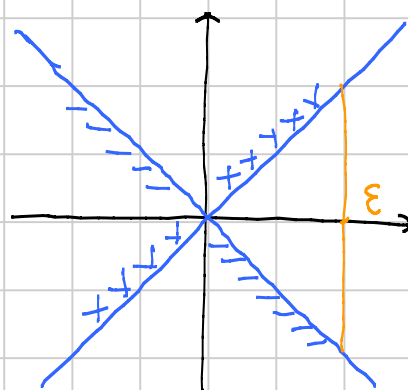
Step 1 Osservo che $f(x,x) > 0$ e $f(x,-x) < 0$ per x piccoli

$$f(x,x) = x^2 + o(x^2), \quad f(x,-x) = -x^2 + o(x^2)$$

Step 2 Osservo che $f_y(x,y) > 0$ nel triangolo

$$T_\varepsilon := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,\varepsilon), -x \leq y \leq x \}$$

se $\varepsilon > 0$ è piccolo abbastanza.

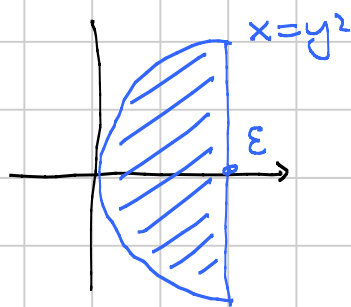


Osservo che $f_y(x,y) = x + o(\sqrt{x^2+y^2})$ e ogni funzione di questo tipo è positiva nel triangolo.

$$f_y(x,y) = x + r(x,y) = x \left(1 + \underbrace{\frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}}_{\leq \sqrt{2} \text{ perché } y^2 \leq x^2} \right) \geq \frac{x}{2}$$

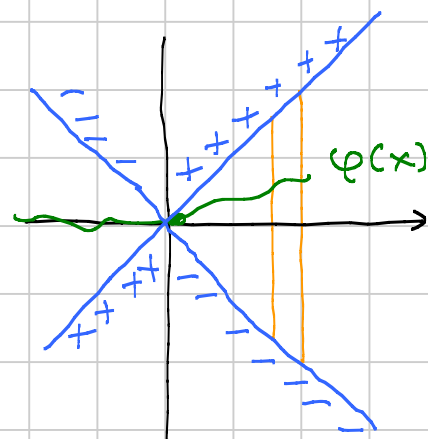
Oss. Non è ovvio, anzi è falso, che una funzione del tipo $\varphi(x,y) = x + o(\sqrt{x^2+y^2})$ è positiva in una "parabolina"

[Farsi un esempio e meditare sulle differenze rispetto al triangolo].



Step 3 Definisco la curva $y = \varphi(x)$ nel triangolino.

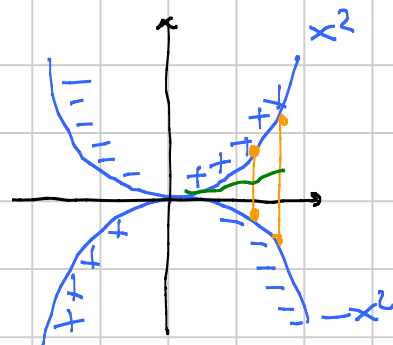
Osservo che nel triangolo tutte le restrizioni a rette verticali sono strett. crescenti



Step 4 Discorsi analoghi negli altri triangoli.

Step 5 Dico che $\varphi'(0) = 0$

Considero $f(x, x^2) = x^3 + o(x^3)$
 $f(x, -x^2) = -x^3 + o(x^3)$



Concludo, ripetendo la dimostrazione del p.to 3, che

$$-x^2 \leq \varphi(x) \leq x^2 \quad \text{in un intorno di } 0$$

da cui la tesi (rapporto incrementale)

Step 6 Vediamo se φ è di classe C^1

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} = - \frac{\varphi(x) + o(\sqrt{x^2 + \varphi(x)^2})}{x + o(\sqrt{x^2 + \varphi(x)^2})} \\ &= \frac{o(x)}{x(1 + \frac{o(\dots)}{x})} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Nel numeratore ho usato che $|\varphi(x)| \leq x^2$

Nel denominatore basta che $|\varphi(x)| \leq x$

Step 7 È vero in generale che φ (e ψ) sono C^2 se φ_0 è la f iniziale?

no! $f(x,y) = (y - x^{\frac{3}{2}})x = xy - x^{\frac{5}{2}} \in C^2$

Però il luogo di zeri è dato dall'asse y e dalla curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ che è solo C^1 .

Oss. Dove ho usato $f \in C^2$ nella dimostrazione?

[L'ho usato dove dico che $f_y = x + o(\dots)$]

Esempio 2 $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x^{2018} + y^4 + \arctan(y^2) = 2\}$

$$\omega_a = -\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} dx + \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} dy$$

Dimostrare che V è una curva e calcolare $\int_{V^+} \omega_a$

orientata antiorario

V è simmetrico rispetto agli assi e si proietta su $x \in [-1,1]$.

ω_a è la "solita" con singolarità in $(a,0)$.

Quindi

• se $|a| > 1 \rightsquigarrow$ la curva è ovoidale

a quella costante + forma chiusa $\rightsquigarrow \int = 0$

• se $|a| < 1 \rightsquigarrow$ la curva è ovoidale ad un S^1

$\rightsquigarrow \int = 2\pi$.

— 0 — 0 —

FINE BOOK 2

