

Dim. via mappa aperta: caso $n=2$ e $k=1$

Siamo in $\mathbb{R}^2$, il pto è (x_0, y_0) , il vincolo è $g(x, y) = 0$.

IDEA: considero la funzione $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\Phi(x, y) = (f(x, y) - f(x_0, y_0), g(x, y))$$

Suppongo wlog che (x_0, y_0) sia pto di minimo vincolato

Osservo che $\Phi(x_0, y_0) = (0, 0)$ e

$$J\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla f(x, y) \\ \nabla g(x, y) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ \square \\ 2 \end{matrix}$$

CLAIM: $\text{rank}(J\Phi(x_0, y_0)) \leq 1$. Se fosse vero, si aprono 2 scenari:

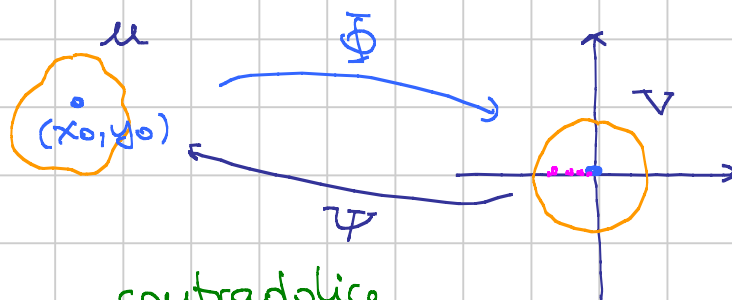
- se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$, allora ok
- se $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, allora $\nabla f(x_0, y_0)$ deve essere un suo multiplo, quindi ok pure.

Quindi resta da dim. il claim. Se per assurdo non fosse vero, $J\Phi(x_0, y_0)$ sarebbe matrice invertibile, quindi Φ sarebbe loc. invertibile e aperta in un intorno di (x_0, y_0)

Idea: i pti sull'asse x negativo in arrivo hanno

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &< 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

$\leadsto$ contraddizione
 (x_0, y_0) pto di min.



Detto meglio, indico con $\Psi: V \rightarrow \mathbb{R}$ l'inversa e considero

$$\Psi\left(\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\text{defin. sta in } V}, 0\right) = (x_n, y_n)$$

Per definizione

$$f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0) - \frac{1}{n}$$

$$g(x_n, y_n) = 0$$

cont. di Ψ

$$\leadsto (x_n, y_n) \in V, \quad f(x_n, y_n) < f(x_0, y_0), \quad (x_n, y_n) \xrightarrow{\downarrow} (x_0, y_0)$$

$\leadsto (x_0, y_0)$ non è p.to di min. nemmeno locale.

Stessa dim. in dim. e codim. arbitraria

Siamo in $\mathbb{R}^n$, il p.to è x_0 , il vincolo è $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$.

Adesso considero $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} f(x) - f(x_0) \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix}$$

Come prima $\Phi(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^k$. Inoltre

$$J\Phi(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ \nabla g_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x_0) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \sim \\ \boxed{}_{k+1} \end{matrix}$$

CLAIM: rango $\leq k$. Se fosse così, si aprono 2 scenari

- le ultime k righe sono lin. dip., e allora ok
- le " " " sono lin. indep., ma allora per forza la prima riga è loro comb. lin., quindi ok.

Se fosse $\text{rank} = k+1$, la mappa Φ sarebbe full rank in x_0 , quindi l'immagine conterrebbe un intorno di 0 in $\mathbb{R}^{k+1}$, quindi anche p.ti del tipo

$$\left(-\frac{1}{n}, 0, \dots, 0\right)$$

che quindi sarebbero immagine $\Phi(x_n)$ con

$$f(x_n) < f(x_0)$$

$$g_i(x_n) = 0 \quad \text{per } i = 1 \dots k \quad (\text{cioè } x_n \in V)$$

$$x_n \rightarrow x_0$$

il che contraddice il minimo locale.

— 0 — 0 —

Dim. per penalizzazione (DE GIORGI ?)

Supponiamo WLOG x_0 p.to di min. Siamo nel caso generale.

Il vincolo è $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$.

Step 1 Posso supporre WLOG che x_0 è p.to di min. STRETTO
cioè $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$

Se così non è, considero $\hat{f}(x) := f(x) + \|x - x_0\|^{2018}$

Questa ha p.to di min. stretto in x_0 e ha in x_0 le stesse derivate di f .

Step 2 L'IDEA !! Pongo

$$f_n(x) := f(x) + \frac{1}{2}n g_1(x)^2 + \dots + \frac{1}{2}n g_k(x)^2$$

Dopo video

Aggiunto $\frac{1}{2}$ per
non avere 2
nelle derivate

Idea: per n grande $f_n(x)$ assume minimo (per senza vincolo) praticamente su V , quindi il pbm. vincolato per f è $\sim$ il problema non vincolato per f_n .

Più formalmente: prendo $\epsilon > 0$ t.c. $\bar{B}_\epsilon(x_0) \subseteq \Omega$ e considero

$$\min \{ f_n(x) : x \in \bar{B}_\epsilon(x_0) \}$$

Esiste per W. e viene assunto in un certo pto $x_n \in \bar{B}_\epsilon(x_0)$

CLAIM: $x_n \rightarrow x_0$ per $n \rightarrow +\infty$

Se fosse così, intanto $x_n \in B_\epsilon(x_0)$, ma allora
 $\uparrow$ aperta

$$\nabla f_n(x_n) = 0 \quad \text{definitiv.}$$

e quindi

$$\nabla f(x_n) + \lambda_{1,n} \nabla g_1(x_n) + \dots + \lambda_{k,n} \nabla g_k(x_n) = 0$$

$$\text{cioè} \quad \nabla f(x_n) = \lambda_{1,n} \nabla g_1(x_n) + \dots + \lambda_{k,n} \nabla g_k(x_n)$$

Quindi $\nabla f(x_n)$ è comb. lin. di $\nabla g_1(x_n), \dots, \nabla g_k(x_n)$
e non resta che sperare di passare al limite.

Step 3 Lemma (esercizio)

Consideriamo $(k+1)$ succ. di vettori $W_n, V_n^1, \dots, V_n^k$

$$\begin{array}{ccc} W_n & V_n^1 & \dots & V_n^k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ W_\infty & V_\infty^1 & & V_\infty^k \end{array}$$

Supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia che W_n è
comb. lin. di $V_n^1, \dots, V_n^k$.

$$\begin{array}{ccccccc} W_n & = & \lambda_n^1 & V_n^1 & + \dots & + & \lambda_n^k & V_n^k \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \\ W_\infty & = & \lambda_\infty^1 & V_\infty^1 & + \dots & + & \lambda_\infty^k & V_\infty^k \end{array}$$

NO: può succedere che
i coeff. non convergono
a numeri, nemmeno per
s. succ.,

Allora si aprono 2 scenari

- o i v_{∞}^k sono lin. dip.
- o w_{∞} è comb. lin. di v_{∞}^i .

Dim. Lemma Considero $M_n := (w_n | v_n^1 | \dots | v_n^k)$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ il rango è $\leq k$, quindi tutti i minori $(k+1) \times (k+1)$ si annullano, ma allora si annullano anche nella matrice limite, che quindi ha rango $\leq k$.
A questo pto o le ultime k colonne sono lin. dip., o la prima è loro comb. lin.

Detto in modo altisonante: l'applicazione rank è SCI (semicont. sup.) cioè se $M_n \rightarrow M_{\infty}$ allora

$$\text{rank } M_{\infty} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{rank } M_n$$

STEP 4 Dimostro che $x_n \rightarrow x_0$.

Supponiamo che non sia così. Allora esiste $x_{n_k} \rightarrow x_{\infty} \neq x_0$.

Osservo che

$$f_n(x_n) \leq f_n(x_0) = f(x_0).$$

- Se fosse che $x_{\infty} \notin V$, allora (per semplicità uso x_n e non x_{n_k})

$$\begin{array}{ccccccc} f_n(x_n) & = & f(x_n) & + & n & g_1(x_n)^2 & + \dots + n g_k(x_n)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ +\infty & & f(x_{\infty}) & & +\infty & g_1(x_{\infty})^2 & + \dots \end{array}$$

↑ uno di questi è $\neq 0$

che è assurdo
essendo $\leq f(x_0)$

- Se fosse che $x_{\infty} \in V$ ma $x_{\infty} \neq x_0$, allora

$$f_n(x_n) \geq f(x_n) \quad (\text{butto via cosa } \geq 0)$$

e passando al limite avrei che

$$f(x_0) < f(x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f(x_0)$$

$\uparrow$ x_0 pto min. stretto su V $\uparrow$ disug di sopra $\uparrow$ perché è vero per ogni n

e questo è assurdo.

— o — o —

Oss. Il metodo di penalizzazione è utile numericamente.