

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , $k < n$
 $g_1, \dots, g_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , $x_0 \in \Omega$.

Definiamo

$$V := \{x \in \Omega : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\} \quad (\text{luogo di zeri})$$

Supponiamo $x_0 \in V$ sia p.to di max/min vincolato per f su V ,
cioè

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V \quad (\text{min})$$

Allora accade ALMENO una delle seguenti possibilità

(i) $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$ sono lin. dip. (k vettori in $\mathbb{R}^n$)

(ii) $\nabla f(x_0)$ è comb. lin. di $\nabla g_i(x_0)$, cioè $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0).$$

Oss. È un enunciato locale: posso sempre assumere che
 $\Omega = B_r(x_0)$ con $r > 0$ abbastanza piccolo.

TRE DIMOSTRAZIONI

→ esplicitazione del vincolo (naturale, facile se $k=1$, un po' una pena per $k>1$)

→ via teo. mappa aperta (comoda sempre)

→ via penalizzazione (grande idea)

Dim. via teo. funz. implicite, caso $n=2, k=1$

Siamo in $\mathbb{R}^2$, il p.to è (x_0, y_0) , il vincolo è $g(x, y) = 0$.

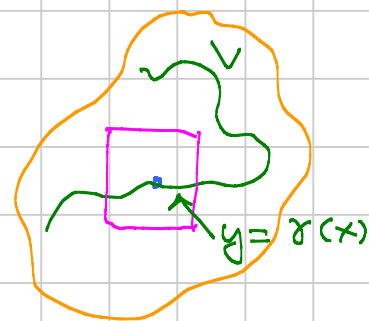
Se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$ siamo nel caso (i).

Supponiamo $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, wlog $g_y(x_0, y_0)$.

Allora in una opportuna finestra centrata in x_0 vale che

$$V = \{(x, \gamma(x)) : x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)\}$$

per una opportuna $\gamma: (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \rightarrow \mathbb{R}$



Considero la funzione

$$\varphi(x) := f(x, \gamma(x)) \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Per ipotesi sappiamo che x_0 è p.to di max/min per φ , dunque

$$\varphi'(x_0) = 0$$

D'altra parte

chain rule

$$\varphi'(x) \stackrel{\text{chain rule}}{=} f_x(x, \gamma(x)) + f_y(x, \gamma(x)) \gamma'(x)$$

$$\stackrel{\text{teo. funz. impl.}}{=} f_x(x, \gamma(x)) + f_y(x, \gamma(x)) \left[- \frac{g_x(x, \gamma(x))}{g_y(x, \gamma(x))} \right]$$

$$\leadsto 0 = \varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) - \underbrace{\frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}}_{\lambda} g_x(x_0, y_0)$$

$$\leadsto f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0)$$

LA DIM. NON È FINITA

Mi serve anche $f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0)$ con lo stesso λ .

Questa seconda uguaglianza è vera per defn. di λ .

Stessa dim. con n generico e sempre $k=1$

Siamo in $\mathbb{R}^n$ e il pto è $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$

Il vincolo è $g(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Se $\nabla g(x_0) = 0$, allora ok, altrimenti wlog $g_{x_n}(x_0) \neq 0$.

Quindi in una finestrella centrata in x_0 l'equazione di V è

$$x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Pongo $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}))$

e osservo che questa ha pto di max/min in $(x_{0,1}, \dots, x_{0,n-1})$, dunque in quel pto si annullano le sue $n-1$ derivate parziali.

Più formalmente, per ogni $i = 1, \dots, n-1$ vale

$$0 = \varphi_{x_i}(x_{0,1}, \dots, x_{0,n-1})$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \varphi_{x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= f_{x_i}(\dots) + f_{x_n}(\dots) \gamma_{x_i}(\dots) \\ &= f_{x_i}(\dots) - f_{x_n}(\dots) \frac{g_{x_i}(\dots)}{g_{x_n}(\dots)} \end{aligned}$$

Sostituendo il punto troviamo

$$0 = \varphi_{x_i}(x_0, \dots, x_{n-1}) = f_{x_i}(x_0) - \underbrace{\frac{f_{x_n}(x_0)}{g_{x_n}(x_0)}}_{\lambda} g_{x_i}(x_0)$$

Abbiamo così ottenuto che

$$f_{x_i}(x_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stesso } \lambda}}{\lambda} g_{x_i}(x_0) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

Ci serve la stessa con $i = n$, ma è la def. di λ .
 $\quad \quad \quad _ \quad _ \quad _ \quad _ \quad _$

Stessa dim. in dimensione n e codimensione k

(Fatta su AM2-16 con tutti gli indici, ora rifatta usando il linguaggio vettoriale)

Siamo in $\mathbb{R}^m$, pongo $n := m - k$, il punto è $(\overset{\overset{m}{\uparrow}}{x_0}, \overset{\overset{k}{\uparrow}}{y_0}) \in \mathbb{R}^m$
 il vincolo è $g(x) = 0$, con g pensata a valori in $\mathbb{R}^k$ e
 componenti $g_1(x), \dots, g_k(x)$.

Se $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ sono lin. dip. in (x_0, y_0) , allora ok.
 Altrimenti

$Jg(x_0, y_0)$ ha rango k (matrice che ha ∇g_i come righe)

quindi ammette un minore $k \times k$ diverso da 0. wlog quello
 fatto a dx.

Allora posso esplicitare le ultime k variabili, cioè vicino a
 (x_0, y_0) il luogo γ ha equazione

$\gamma = \gamma(x)$ funzione di n variabili a valori in $\mathbb{R}^k$

Considero

$\varphi(x) := f(x, \delta(x))$ e questa ha max/min in x_0
 $\uparrow$ ha valori in $\mathbb{R}$

Ora
$$\nabla \varphi(x) = \nabla_x f(x, \delta(x)) + \nabla_y f(x, \delta(x)) J \delta(x)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ m \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ m \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ k \end{array} \begin{array}{c} m \\ k \end{array}$$

$$= \nabla_x f(x, \delta(x)) - \nabla_y f(x, \delta(x)) [J_y g(\dots)]^{-1} [J_x g(\dots)]$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ k \end{array} \begin{array}{c} k \\ k \end{array} \begin{array}{c} m \\ m \end{array}$$



Quando metto $x = x_0$ ottengo $\delta(x_0) = y_0$ e trovo

$$\nabla_x f(x_0, y_0) = \boxed{\nabla_y f(x_0, y_0) [J_y g(x_0, y_0)]^{-1}} J_x g(x_0, y_0)$$

riga lunga k che chiamo

$$\Delta = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

Ora basta osservare che

$$\Delta J_x g(x_0, y_0) = (\lambda_1 \dots \lambda_k) \begin{pmatrix} \nabla_x g_1(x_0, y_0) \\ \vdots \\ \nabla_x g_k(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Abbiamo così ottenuto che

$$\nabla_x f(x_0, y_0) = \lambda_1 \nabla_x g_1(x_0, y_0) + \dots + \lambda_k \nabla_x g_k(x_0, y_0)$$

Questo sistema le prime m variabili.

Controlliamo che la definizione di Δ sistemi le altre.

$$\Delta := \nabla_y f(x_0, y_0) [\nabla_y g(x_0, y_0)]^{-1}$$

$$\leadsto \nabla_y f(x_0, y_0) = \Delta \nabla_y g(x_0, y_0)$$

$$= (\lambda_1 \dots \lambda_k) \begin{pmatrix} \nabla_y g_1(x_0, y_0) \\ \vdots \\ \nabla_y g_k(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

da cui si conclude come sopra.

— o — o —

Consiglio: quando si studia la dim., scrivere sempre le dimensioni dei vari oggetti.