

Esercizi su la funzione inversa: data $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o più in generale $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), stabilire

- dove è loc. invertibile (si usa il teorema)
 - se è glob. iniettiva
 - se è surgettiva
 - qual è l'immagine
- } annunciarsi!!

Esempio 1 $f(x, y) = (2x + \sin y, 3y - \sin x)$

① Studio invertibilità locale

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & \cos y \\ -\cos x & 3 \end{pmatrix} \quad \det = 6 + \cos x \cos y \geq 5$$

Quindi f è loc. inv. nell'intorno di ogni punto ed è una mappa aperta

② Per uno studio più globale, provo ad "invertire a mano"

$$\begin{aligned} 2x + \sin y &= u \\ 3y - \sin x &= v \end{aligned} \quad \text{Dati } (u, v), \text{ cerco } (x, y)$$

Ricavo y dalla seconda: $y = \frac{v + \sin x}{3}$. Sostituisco nella 1^a:

$$2x + \sin\left(\frac{v + \sin x}{3}\right) = u$$

Il LHS come funzione di x è $\text{sing } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (limiti a $\pm\infty$)

Dati $(u, v) \rightsquigarrow$ trovo $x \rightsquigarrow$ trovo y ☺ f è surgettiva

Il LHS è pure iniettivo (basta calcolare la derivata), quindi x lo trovo in modo unico $\rightsquigarrow y$ pure in modo unico.

Esempio 2 $f(x, y) = (x+y, x^2+y^2)$

① Inv. locale $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ $\det = 2(y-x)$

f è loc. invertibile fuori dalla bisettrice $y=x$.
Sulla bisettrice per ora BOM.

② Discorsi globali

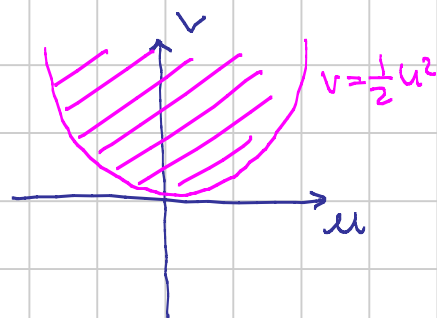
La surgettività non c'è: la seconda variabile deve essere ≥ 0 nell'immagine.

Posto $\begin{cases} x+y = u \\ x^2+y^2 = v \end{cases}$

dalla disuguaglianza tra le medie sappiamo che

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad \frac{v}{2} \geq \frac{u^2}{4} \quad v \geq \frac{1}{2}u^2$$

Immagine (f) sta sulla o sopra la parabola. Sarà tutto?



$$y = u - x$$

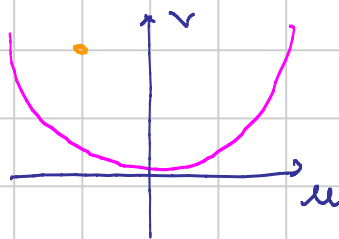
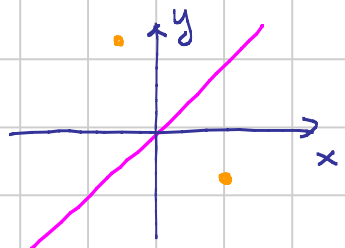
$$x^2 + u^2 + x^2 - 2ux = v \quad \leadsto \quad 2x^2 - 2ux + (u^2 - v) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2u^2 + 2v}}{2} = \frac{u \pm \sqrt{2v - u^2}}{2}$$

Se $(u, v) \in$ sopra parabola, allora posso ricavare x e y , e lo posso fare in modo unico solo se sono sulla parabola.

In tal caso ottengo $(x, y) = (\frac{u}{2}, \frac{u}{2}) \in$ bisettrice.

Insomma: la bisettrice e la parabola si mappano 1:1



I due semipiani $y > x$ e $y < x$ mappano invertibilmente nella parte di piano che sta sopra la parabola.

Esempio 3 $f(x, y) = (x^2 + \sin(xy+1), y^2 - y + \arctan x)$

È surgettiva come $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? NO: entrambe le comp. sono limitate dal basso

$$f(x, y) = (x^2 - y + \sin x, y^2 - x + \arctan(xy))$$

È surgettiva come $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? Ciascuna delle due componenti può assumere valori a piacere SEPARATAMENTE.

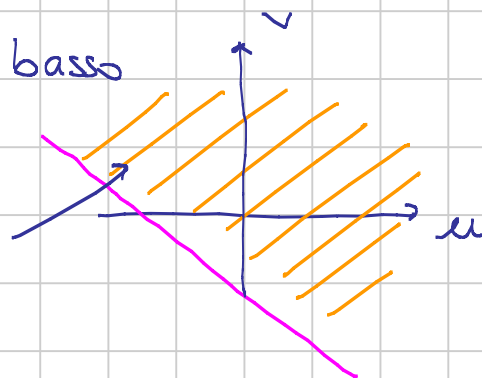
MA, se sommo le 2 componenti trovo

$$x^2 + y^2 - x - y + \text{robaccia} =: \varphi(x, y)$$

e questa è limitata dal basso ($\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \varphi(x, y) = +\infty$)

Questo dice che $u+v$ è limitata dal basso

immagine
sta qui



È iniettiva?

$$\begin{cases} x^2 - y + \sin x = u \\ y^2 - x + \arctan(xy) = v \end{cases}$$

$$\leadsto y = x^2 + \sin x - u$$

↓
sostituisco nella 2ª

$$(x^2 + \sin x - u)^2 - x + \arctan[x(\dots)] = v$$

Questo esclude univocamente la surg.: fisso $u=15$ e v abbastanza negativo $\leadsto$ non trovo x .

Lo stesso ragionamento esclude l'ineffettività, prendo $u=13$ e $v = \text{LHS calcolato in } 0 \text{ più } 1$. A questo punto trovo almeno 2 valori di x .

Esempio 4
$$\begin{cases} m^2(x+y) + \sin(xy) = m \\ m(x-y) + \arctan(xy) = 2m y \sin x \end{cases}$$

Dimostrare che per m grande la soluz. è unica.

Pongo $\frac{1}{m} = z$ e trovo dividendo

$$x+y + z^2 \sin(xy) - z = 0$$

$$x-y + z \arctan(xy) - 2y \sin x = 0$$

$(0,0,0)$ è soluzione. Faccio lo jacobiano in $(0,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ricavo } x \text{ e } y \text{ in funzione di } z$$

in una finestra centrata in $(0,0,0)$

Inv. $\rightsquigarrow x(z), y(z) \rightsquigarrow x(\frac{1}{m}), y(\frac{1}{m})$

Dal Taylor di $x(z)$ e $y(z)$ ho la p.p. di x_m e y_m

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{dal teo. funz. impl.})$$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x=z \\ x=y \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad x=y = \frac{z}{2} + o(z)$$

$$\rightsquigarrow x_m = \frac{1}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right) \text{ e } y_m \text{ idem.}$$

UNICITÀ Prendo una sol. $(x_m, y_m, \frac{1}{m})$. Se riesco a dimostrare che $x_m \rightarrow 0$ e $y_m \rightarrow 0$, allora ho finito perché definitivamente entrano nella finestra dove ho unicITÀ. Se non ci fosse $y \sin x$ sarebbe facile. 😊

