

Teorema funzioni implicite ($k=1, m=2$) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \text{Int}(\Omega), f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

(i) $f(x_0, y_0) = 0$

(ii) f continua in Ω (iii) f_y esiste continua in Ω

(iv) $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora $\exists \rho > 0 \exists \tau > 0 \exists \varphi: [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \rightarrow [y_0 - \tau, y_0 + \tau]$ t.c.

$$\{(x, \varphi(x)) : x_0 - \rho \leq x \leq x_0 + \rho\} = \{(x, y) : |x - x_0| \leq \rho, |y - y_0| \leq \tau, f(x, y) = 0\}$$

Dtm via pto fisso Supponiamo wlog $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ① Scelta delle costanti.

• Prendo $m_0 > 0$ t.c. $\frac{1}{|f_y(0, 0)|} \leq \frac{1}{m_0}$ (posso definire m_0 in modo che ci sia =)

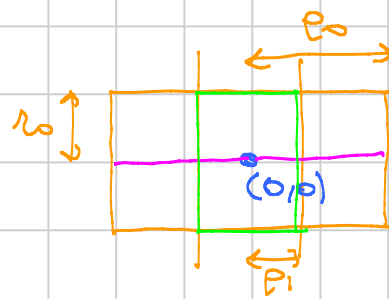
• Prendo $\rho_0 > 0$ ed $\tau_0 > 0$ t.c.

$$|f_y(x, y) - f_y(0, 0)| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall (x, y) \in [-\rho_0, \rho_0] \times [-\tau_0, \tau_0]$$

• Prendo $\rho_1 > 0$ tale che

$$|f(x, 0)| \leq \frac{m_0 \tau_0}{2} \quad \forall x \in [-\rho_1, \rho_1]$$

↑
posso perché $f(0, 0) = 0$
e f continua

La finestra ha $\rho := \rho_1$ e $\tau := \tau_0$ 

② Formulazione come pto fisso

Per ogni $x \in [-p_1, p_1]$ considero la funzione della variabile y :

$$\Phi_x(y) := y - \frac{f(x, y)}{f_y(0, 0)} \quad \forall y \in [-r_0, r_0]$$

Osservo che $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_x(y) = y \Leftrightarrow y$ è pto fisso della funzione Φ_x .

Claim: $\rightarrow \Phi_x: [-r_0, r_0] \rightarrow [-r_0, r_0]$

$\uparrow$ metrico completo

$\rightarrow \Phi_x$ è contrazione

③ Calcolo la derivata

$$\Phi'_x(y) = 1 - \frac{f_y(x, y)}{f_y(0, 0)} = \frac{f_y(0, 0) - f_y(x, y)}{f_y(0, 0)}$$

da cui

$$\begin{aligned} |\Phi'_x(y)| &\leq |f_y(0, 0) - f_y(x, y)| \cdot \frac{1}{|f_y(0, 0)|} \leq \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{m_0}{2} \leq \frac{1}{m_0} \end{aligned}$$

④ Dimostro i claim Per ogni $x \in [-p_1, p_1]$ vale

$$|\Phi_x(y_2) - \Phi_x(y_1)| \leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1| \quad \forall (y_1, y_2) \in [-r_0, r_0]^2$$

$\uparrow$
teo. Lagrange

da cui Φ è contrazione.

Resta da dim. che Φ_x manda $[-r_0, r_0]$ in sé, cioè

$$|\Phi_x(y)| \leq r_0 \quad \forall y \in [-r_0, r_0] \quad \forall x \in [-p_1, p_1]$$

$$\begin{aligned}
|\Phi_{(x)}(y)| &= |\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0) + \Phi_{(x)}(0)| \\
&\leq \underbrace{|\Phi_{(x)}(0)|}_{\frac{|f(x,0)|}{|f_y(0,0)|}} + \underbrace{|\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0)|}_{\leq \frac{1}{2}|y|} \leq r_0 \\
&\leq \frac{M_0 r_0}{2} \frac{1}{M_0} \\
&\quad \text{--- } 0 \quad \text{--- } 0 \quad \text{---}
\end{aligned}$$

Caso generale (k equazioni in dimensione n)

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \quad m := n - k \quad (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{ccc}
(x_0, y_0) \in \Omega & f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k \\
\uparrow \quad \uparrow & \\
m \text{ var.} & k \text{ var.}
\end{array}$$

$$V := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n : \underbrace{f(x, y) = 0}_{\substack{k \text{ equazioni in} \\ n \text{ incognite}}} \}$$

Teorema Setting come sopra.

Supponiamo che

(i) $f(x_0, y_0) = 0 \leftarrow$ vettore k dim

(ii) f continua in Ω

(iii) $J_y f(x, y)$ esiste ed è continuo in Ω

$\uparrow$ matrice $k \times k$

(iv) $J_y f(x_0, y_0)$ invertibile.

Allora valgono le seguenti conclusioni

① (Esistenza e unicità) $\exists \rho > 0 \exists r > 0 \exists$ unica

$$\varphi: \bar{B}_\rho(x_0) \rightarrow \bar{B}_r(y_0)$$

tale che

finestra

$$\{(x, \varphi(x)) : x \in \bar{B}_\rho(x_0)\} = \bigcap (\bar{B}_\rho(x_0) \times \bar{B}_r(y_0))$$

② La φ di cui sopra è continua in $\bar{B}_\rho(x_0)$. (continuità)

③ Se $f(x, y)$ è Lipschitziana in x con costante indep. da y , allora φ è Lip. in $\bar{B}_\rho(x_0)$. (Lipschitzianità)

④ Se f è diff. in x_0 , allora φ è diff. in x_0 e vale

$$J_x \varphi(x_0) = - [J_y f(x_0, y_0)]^{-1} [J_x f(x_0, y_0)]$$

$\begin{matrix} m \\ \boxed{} \end{matrix} = - \begin{matrix} k \\ \boxed{} \end{matrix} \begin{matrix} k \\ \boxed{} \end{matrix} \begin{matrix} m \\ \boxed{} \end{matrix}$ (Differenziabilità)

⑤ (Ulteriore regolarità) Se f è di classe C^k in Ω , allora φ è di classe C^k .

Dim. wlog $(x_0, y_0) = (0, 0)$

① Scelta delle costanti

• Prendo $m_0 > 0$ t.c.

$$\| [J_y f(0, 0)]^{-1} \| \leq \frac{1}{m_0}$$

$\uparrow$
norma di matrice

• Prendo $\rho_0 > 0$ ed $r_0 > 0$ t.c.

$$\| J_y f(x, y) - J_y f(0, 0) \| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall (x, y) \in \bar{B}_{\rho_0}^m(0) \times \bar{B}_{r_0}^k(0)$$

$\uparrow$
norma di matrice

• Presumo $\rho_1 > 0$ t.c.

$$\|f(x, 0)\| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall x \in \overline{B}_{\rho_1}^m(0)$$

$\uparrow$
norma di vett.
 k -dim.

② Formulazione come pto fisso

$$\Phi_{(x)}(y) := y - [J_y f(0, 0)]^{-1} f(x, y) \quad \forall y \in \overline{B}_{\rho_0}^k(0)$$

$\mathbb{R}^k - \boxed{\mathbb{R}^k} \mathbb{R}^k$

Come prima y è pto fisso $\Leftrightarrow f(x, y) = 0$.

Claim: per ogni $x \in \overline{B}_{\rho_1}^m(0)$ vale che

$\rightarrow \Phi_{(x)}$ è contrattiva in $\overline{B}_{\rho_0}^k(0)$

$\rightarrow \Phi_{(x)}$ manda $\overline{B}_{\rho_0}^k(0)$ in sé.

③ Jacobiana di $\Phi_{(x)}$

$$\begin{aligned} J_y \Phi_{(x)}(y) &= \text{Id}_k - [J_y f(0, 0)]^{-1} [J_y f(x, y)] \\ &= [J_y f(0, 0)]^{-1} [J_y f(0, 0) - J_y f(x, y)] \end{aligned}$$

da cui volendo (ma non serve davvero)

$$\begin{aligned} \|J_y \Phi_{(x)}(y)\| &\leq \| [J_y f(0, 0)]^{-1} \| \cdot \| J_y f(0, 0) - J_y f(x, y) \| \\ &\leq \frac{1}{m_0} \leq \frac{m_0}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(Lemma (Esercizio)) : $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ per ogni coppia di matrici di dimensioni compatibili)

④ Verifica dei claim Per ogni y_1, y_2 in $\overline{B}_{r_0}^k(0)$

$$\|\Phi_{(x)}(y_2) - \Phi_{(x)}(y_1)\| \leq \|J_y \Phi_{(x)}(c) \cdot (y_2 - y_1)\|$$

Disug. $\uparrow$ Lagrange
vettoriale (c è un pto sul
segmento di estremi y_1 e y_2)

$$\leq \underbrace{\|J_y \Phi_{(x)}(c)\|}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \|y_2 - y_1\|$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\| \leadsto \text{contrazione}$$

[Volevo ho usato che

$$\|AB\| = \|A(B\sigma)\| \leq \|A\| \cdot \|B\sigma\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\sigma\|$$

senza mai usare $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$].

Resta da dim. che $\Phi_{(x)}$ manda $\overline{B}_{r_0}^k(0)$ in sé :

$$\|\Phi_{(x)}(y)\| \leq \|\Phi_{(x)}(0)\| + \underbrace{\|\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0)\|}_{\substack{\leq \frac{1}{2} \|y\| \\ \leq \frac{1}{2} \|r_0\|}} \leq r_0.$$

$$\begin{aligned} & \| [J_y f(0,0)]^{-1} f(x,0) \| \\ & \leq \| [J_y f(0,0)]^{-1} \| \cdot \| f(x,0) \| \\ & \leq \frac{1}{w_0} \leq \frac{w_0 r_0}{2} \end{aligned}$$