

"VARIETÀ"

- Teo. FUNZIONI IMPLICITE
- Teo. FUNZIONE INVERSA
- Moltiplicatori di Lagrange

Teo. funzioni implicite (a Pisa teorema del DINI)Setting più semplice. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, poniamo

$$V := \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$$

Luogo di zeri di f .
(1 equ. in $\mathbb{R}^2$)

Più in generale, possiamo prendere

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

(1 equ. in $\mathbb{R}^n$)

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

(k equ. in $\mathbb{R}^n$)

Brutalmente: se metto k equazioni in $\mathbb{R}^n$ ottengo un oggetto V di dimensione $n-k$
(questo k si chiama co-dimensione)

Problema: cercare, sotto opportune ipotesi su f , di descrivere la struttura di V .

Casi classici

- $n=2$ e $k=1$
- n generico e $k=1$
- n generico e k pure ($k \leq n$).

Teorema ($n=2$ e $k=1$) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $(x_0, y_0) \in \Omega$,
sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f(x_0, y_0) = 0$

(ii) f continua in Ω

(iii) $f_y(x, y)$ esiste ed è continua in Ω

(iv) $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Poniamo

$$V := \{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = 0\}.$$

① Allora esistono $\rho_0 > 0$ e $r_0 > 0$, ed esiste unica

$$\varphi: [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0] \rightarrow [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$$

tali che

$$V \cap ([x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]) = \{(x, y) : x \in [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0], \\ y = \varphi(x)\}$$

② La funzione φ è continua in $[x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0]$

③ Se $f \in C^1$ in Ω , allora φ è derivabile e vale

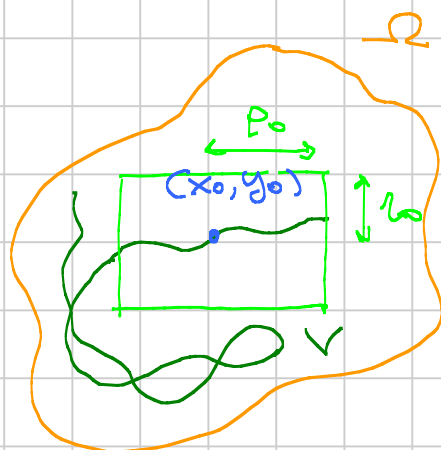
$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

④ Se $f \in C^k$ in Ω , allora $\varphi \in C^k$.

Geometricamente: nella finestra centrata in (x_0, y_0) e di semilati opportuni ρ_0 ed r_0 l'insieme V è il grafico di una certa $\varphi(x)$.

Moralmente: sto esplicitando

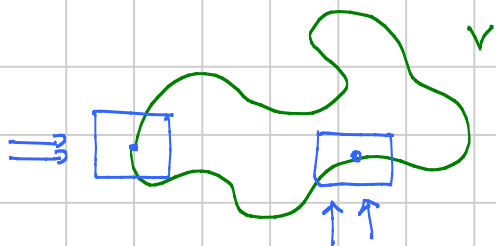
$f(x, y) = 0$ come $y = \varphi(x)$. Fuori dalla finestra non so nulla



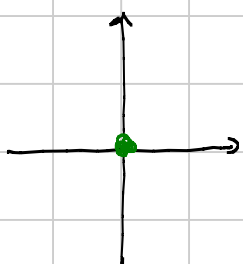
Oss. L'ipotesi chiave è che $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Se fosse $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, allora posso "ricavare" $x = \varphi(y)$.

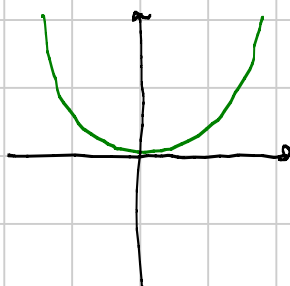
Se $\nabla f(x, y) \neq 0$ ovunque in Ω , allora in ogni p.to di V posso ricavare in almeno uno dei 2 versi.



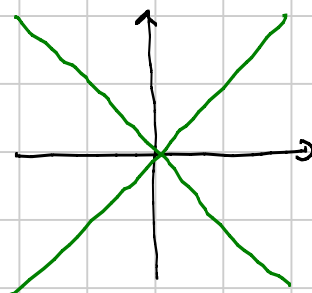
Dove $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ può succedere di tutto. Sia $(x_0, y_0) = (0, 0)$



$x^2 + y^2 = 0$
(manca esistenza)



$(y - x^2)^2 = 0$
(no hp, ma
si tesi)



$x^2 - y^2 = 0$
(no unicità).

Dim.

Esistenza e unicità della φ

Scegliamo la finestra. Wlog assumo $f_y(x_0, y_0) > 0$.

Per le ipotesi (ii) e (iv) esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ t.c.

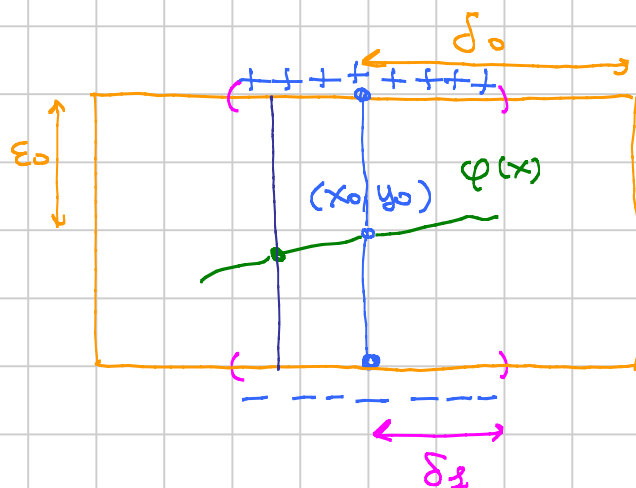
$$f_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$$

Considero $y \rightarrow f(x_0, y)$.

Per l'ipotesi su f_y avremo che

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0, \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

Per continuità di $f(x, y)$, esiste $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ tale che



$$f(x, y_0 - \varepsilon_0) < 0$$

$$f(x, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$$

$$\forall x \in \quad "$$

Solo $\rho_0 := \delta_+$ e $\rho_0 := \varepsilon_0$.

Per ogni $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ considero la funzione

$$y \rightarrow f(x, y)$$

Questa è negativa per $y = y_0 - \varepsilon_0$, positiva per $y = y_0 + \varepsilon_0$ e strett. crescente in mezzo. Quindi esiste un unico y compreso tra $y_0 - \varepsilon_0$ e $y_0 + \varepsilon_0$ t.c. $f(x, y) = 0$.

Chiamo questo y con $\varphi(x)$.

Continuità Voglio dimostrare che $\varphi(x)$ è continua.

Basta dimostrare che è continua in x_0 . Ci sono due modi

1° modo (Cont. per succ. e demma sotto-sotto)

Prendo $x_n \rightarrow x_0$ e voglio dim. che $\varphi(x_n) \rightarrow y_0$.

Se non fosse vero, esisterebbe una s.succ. tale che

$$\varphi(x_{n_k}) \rightarrow z_0 \neq y_0. \quad (z_0 \in [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0])$$

D'altra parte

$$0 = f(x_{n_k}, \varphi(x_{n_k}))$$

↓

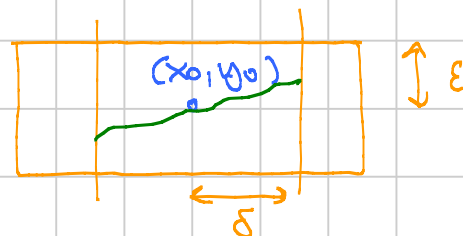
$f(x_0, z_0) = 0$ e l'unico p.to "sopra x_0 " in cui f si annulla nella finestra è y_0 .

2° modo (ε/δ e restrizione)

Mi viene dato $\varepsilon > 0$.

Ripetendo la dimostrazione trovo una nuova finestra con semiampiezza verticale ε in cui

γ è grafico di qualcosa, che per unicità è proprio φ . Quindi $\varphi(x) \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ se x è abbastanza vicino ad x_0 .



Oss. Usando il 2° modo, finora abbiamo usato solo la continuità separata nelle 2 variabili.

Derivabilità

Brutal mode: $f(x, \varphi(x)) = 0$. Derivo e ottengo

$$f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \quad (\text{Ho assunto che } \varphi \text{ fosse derivabile})$$

Rigoroso: faccio Taylor-Lagrange (anzi è Lagr. direzionale) in (x_0, y_0)

$$0 = f(x, \varphi(x)) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_0 + (x - x_0) f_x(\xi, \eta) + (\underbrace{\varphi(x) - y_0}_{\varphi'(x_0)}) f_y(\xi, \eta)$$

da cui

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = - \frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)}$$

Quando $x \rightarrow x_0$ il LHS $\rightarrow \varphi'(x_0)$ e grazie alla continuità sappiamo che $(\xi, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Dalla derivabilità in x_0 segue la derivabilità in ogni altro p.to (pensato come "centro di finestra").

Ulteriore regolarità BOOTSTRAP !!! A partire da

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

$f \in C^2$ e $\varphi \in C^1 \Rightarrow \varphi' \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^2$ e così via
finché si può.

— o — o —