

Dom. teo. estensione

Step 1 Le funzioni unif. cont. mandano succ. di Cauchy in succ. di Cauchy (lemma generale che vale per $f: X \rightarrow Y$ tra due sp. metrici senza ulteriori ipotesi)

Sia $\{x_n\}$ di Cauchy in X . Prendo $\{f(x_n)\}$.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Prendo il $\delta > 0$ corrisp. nell'unif. cont. Prendo $n_0 \in \mathbb{N}$ corrisp. a δ nella def. di $\{x_n\}$ di Cauchy. Per ogni $n, m \geq n_0$ vale

$$\underbrace{d_X(x_n, x_m) \leq \delta}_{\text{scelta di } n_0} \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon$$

$\uparrow$ δ corrisp. ad ε nell'unif. cont.

Step 2 Definizione dell'estensione $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow Y$.

Dato $x \in \hat{X}$, so che esiste $\{x_n\} \subseteq X$ tale che

$$i(x_n) \rightarrow x \text{ in } \hat{X} \quad (\text{uso densità di } i(X))$$

Ora $\{i(x_n)\}$ è di C. in $\hat{X}$ (perché converge), dunque $\{x_n\}$ è di C. in X (i è isometria), dunque $\{f(x_n)\}$ è di C. in Y (f è u.c.), dunque $f(x_n)$ ammette un limite $y \in Y$ (che è completo). Pongo

$$\hat{f}(x) := y$$

Resta da verificare che è una buona definizione, il che si fa come ad Analisi 1, cioè se $i(\bar{x}_n) \rightarrow x$ allora considero la succ. mista

$$x_0, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, \dots$$

Step 3 È unif. continua.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Per la f c'è un δ che realizza l'v.c.
Prendo $\hat{\delta} \in (0, \delta)$ e dico che questo va bene per la $\hat{f}$.
Dati x e y in $\hat{X}$ con $\hat{d}(x, y) \leq \hat{\delta}$, prendo succ.
approx.

$$i(x_n) \rightarrow x$$

$$i(y_n) \rightarrow y$$

Allora definitivamente.

$$\hat{d}(i(x_n), i(y_n)) \leq \delta$$

Ma allora $d(x_n, y_n) \leq \delta$ (isometria) dunque

$$d_f(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon \quad (\varepsilon/\delta \text{ di } f \text{ v.c.})$$

e passando al limite

$$d_f(\underbrace{\hat{f}(x)}_0, \underbrace{\hat{f}(y)}_0) \leq \varepsilon.$$

Dim. teo. 1 Sia (X, d) sp. metrico dato.

Step 1 Definisco $\hat{X}$ come l'insieme di tutte le succ. di
Cauchy in X .

Definisco $\hat{d} : \hat{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

come

$$\hat{d}(\{x_n\}, \{y_n\}) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

$\uparrow \quad \uparrow$
2. succ. di C .

Verifiche da fare : • $\hat{X} \neq \emptyset$

- $\hat{d}$ è una specie di distanza, cioè verifica tutte le proprietà tranne (d1) (distanza = 0 $\Rightarrow$ p.ti uguali)

- $\hat{d}$ è ben definita, cioè il limite esiste, cioè che $\{d(x_n, y_n)\}$ è una succ. di C. in $\mathbb{R}$

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq$$

$$\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)|$$

$$\leq \underbrace{d(y_n, y_m)}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d(x_n, x_m)}_{\leq \varepsilon}$$

Step 2 Definisco $\hat{X}$ e $\hat{d}$ quotiendando rispetto alla relazione di equivalenza su $\hat{X}$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff d(x_n, y_n) \rightarrow 0$$

Verifiche da fare

- è una relazione di equivalenza (quindi posso $\hat{X}$ come quoziente)
- $\hat{d}$ passa al quoziente, cioè se

$$\{x_n\} \sim \{\bar{x}_n\} \text{ e } \{y_n\} \sim \{\bar{y}_n\} \text{ allora}$$

$$\hat{d}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \hat{d}(\{\bar{x}_n\}, \{\bar{y}_n\})$$

(questo mi permette di definire $\hat{d} : \hat{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

- $\hat{d}$ è una distanza vera su $\hat{X}$ (il quoziente mi regala gratis di)

Step 3 Definisco $i: X \rightarrow \hat{X}$.

Prendo $x \in X$ lo prendo come succ. di C. costante in $\hat{X}$ e prendo la sua classe in $\hat{X}$.

Devo verificare

- i è isometria (semplice una volta capito cosa fare)

- $i(X)$ è denso in $\hat{X}$. Prendo $y \in \hat{X}$. Questo è la classe di equiv. di un succ. di C. $\{x_n\} \subseteq X$.

Dico che $i(x_n) \rightarrow y$ in quanto

$$\hat{d}(i(x_n), y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m)$$

$\uparrow$
 n fisso

più piccolo di ogni ε fissato
 se n è abbastanza grande

Step 4 ($\hat{X}$ è completo)

Devo prendere una succ. di Cauchy di classi di equiv. di Succ. di C. !!!

$\{y_n\} \subseteq \hat{X}$ è di Cauchy in $\hat{X}$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall m \geq n_0 \hat{d}(y_n, y_m) \leq \varepsilon$$

Voglio un presunto limite y_∞ . Cerco la succ. di C. in X la cui classe sarà y_∞ .

Uso la densità di $i(X)$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ tale che

$$\hat{d}(i(x_n), y_n) \leq \frac{1}{n}$$

Dico che $\{x_n\}$ è di C. e a quel p.to pongo y_∞ come la sua classe e dim. che $y_n \rightarrow y_\infty$.

→ gli x_n sono di C. perché sono vicini agli y_n

$$d(x_n, x_m) = \hat{d}(i(x_n), i(x_m)) \leq \text{metto i con. } y_n \text{ e } y_m \text{ e finisco.}$$

→ verifico che $y_n \rightarrow y_\infty$

$$\hat{d}(y_n, y_\infty) \leq \underbrace{\hat{d}(y_n, i(x_n))}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\hat{d}(i(x_n), y_\infty)}$$

↳ in analogia con lo step 3 perché y_∞ è proprio la classe di $\{x_n\}$.

— o — o —