

$$(i) + (ii) \Rightarrow (iii)$$

Lemma (raggio magico - Numero di Lebesgue)

Sia  $(X, d)$  compatto per successioni.

Sia  $\{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $X$ .

Allora esiste almeno un  $r > 0$  con questa proprietà:

$$\forall x \in X \exists i \in I \text{ t.c. } B_r(x) \subseteq U_i.$$

(sarebbe ovvio se  $r$  dipendesse da  $x$ , la cosa importante è che  $r$  non dipende da  $x$ !!)

Dim. Supponiamo per assurdo che nessun raggio sia magico. Allora

$$\forall r > 0 \exists x \in X \text{ t.c. } B_r(x) \text{ non è contenuta in nessun } U_i.$$

Me la gioco con  $r = \frac{1}{n}$ , trovando  $x_n \in X$  t.c.  $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$  non sta in nessun  $U_i$ .

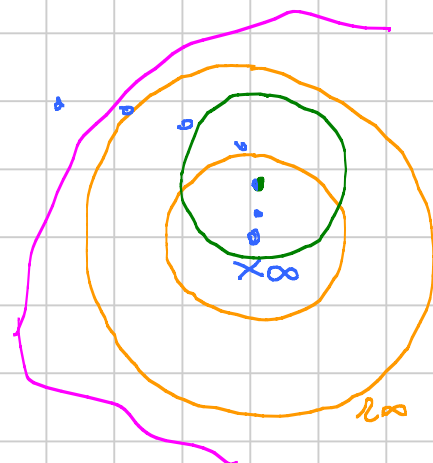
Per ipotesi  $x_n$  ammette una s.succ.  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

Ora  $x_\infty \in U_{i_\infty}$  per def. di ricopr.  
ed essendo aperto esiste  $r_\infty > 0$  t.c.

$$B_{r_\infty}(x_\infty) \subseteq U_{i_\infty}$$

Ora  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$  quindi

$$x_{n_k} \in B_{\frac{r_\infty}{2}}(x_\infty) \text{ definitivamente.}$$



Per tutti questi  $x_{n_k}$  vale che  $B_{\frac{r_\infty}{2}}(x_{n_k}) \subseteq M_{i_\infty}$

il che va contro l'ipotesi dell'assunto usu appena

$$\frac{1}{n_k} < \frac{r_\infty}{2}$$

il che accade definitivamente.

— o — o —

Ho usato un sotto-lemma: se  $d(y, x) \leq \frac{r}{2}$ , allora

$$B_{\frac{r}{2}}(y) \subseteq B_r(x)$$

Dim. Sia  $z \in B_{\frac{r}{2}}(y)$ . Allora

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < r$$

$< \frac{r}{2} \qquad \leq \frac{r}{2}$

— o — o —

Dim. che (ii) + (i)  $\Rightarrow$  (iii)

Sia dato un ricopr.  $\{M_i\}_{i \in I}$ . Voglio trovare s. ric. finito.

Grazie (ii) ho un raggio magico  $r$ .

Grazie alla tot. dim. ho una  $r$ -rete

$$X = \bigcup_{k=1}^n B_r(x_k)$$

Grazie alla magicità del raggio si ha che

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \exists i_k \in I \text{ t.c. } B_r(x_k) \subseteq M_{i_k}$$

Ma allora

$$X = \bigcup_{k=1}^n B_r(x_k) \subseteq \underbrace{\bigcup_{k=1}^n M_{i_k}}_{\text{sottoricoprimento finito}}$$

— o —

Prop. (caratt. della totale limitatezza)

Sia  $(X, d)$  metrico.

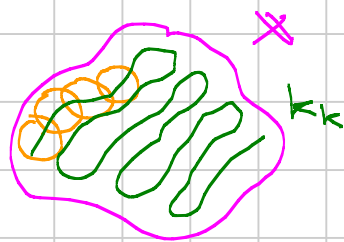
Allora sono fatti equivalenti

(i)  $(X, d)$  è totalmente limitato

(ii) per ogni  $r > 0$  esiste  $K_r \subseteq X$  totalmente limitato t.c.

$$\forall x \in X \exists y \in K_r \text{ t.c. } d(x, y) < r.$$

Oss. Brutalmente la (ii) dice che posso piazzare una  $r$  rete fatta con distributori messi su ogni p.to di  $K_r$ , eventualmente infinito



Dim  $(i) \Rightarrow (ii)$  è ovvia: basta scegliere come  $K_r$  i distributori di una  $r$  rete.

$(ii) \Rightarrow (i)$  Mi viene dato  $r > 0$ . Uso (ii) con  $\frac{r}{2}$  e ottengo un sottoinsieme  $K$  con la proprietà che ogni  $x \in X$  dista da  $K$  meno di  $\frac{r}{2}$ .

Per la tot. lim. di  $K$  trovo  $x_1, \dots, x_n$  in  $K$  tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{r}{2}}(x_i)$$

↑ occhio al raggio

Dico che

$$X = \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$$

↓

Preso  $x \in X$  esiste  $y \in K$  t.c.  $d(x, y) < \frac{r}{2}$ . Poi trovo  $i \in \{1, \dots, n\}$  t.c.  $d(y, x_i) < \frac{r}{2}$ .

Ma allora

$$d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r.$$

Teo. di Heine - Cantor Siano  $(X, d_x)$  e  $(Y, d_y)$  sp. metrici e sia  $f: X \rightarrow Y$ .

Supponiamo che

(i)  $f$  è continua

(ii)  $(X, d)$  è compatto.

Allora  $f$  è unif. cont.

Dim. 1 (Comp. per succ. + assurdo)

Se non è vero, allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad \exists y \in B_\delta(x) \quad d_y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con  $\delta = \frac{1}{n}$  e trovo  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$ .

Per hp esiste  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ . Di conseguenza  $y_{n_k} \rightarrow x_\infty$ .

Ma allora

↑  
va dimostrato

$$d_y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0$$

↓ ← va dimostrato

$$0 = d_y(f(x_\infty), f(x_\infty))$$

Dim. 2 (Comp. per ricoprimenti + raggio magico)

Per ipotesi

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad d_y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Problema: fin qui  $\delta$  dipende da  $x$  (oltre che da  $\varepsilon$ ).

Lo chiamo  $\delta(x)$ .

(Vedere cosa succede se considero ricopr.  $\{B_{\delta_{x_n}}(x)\}_{x \in X}$  e prendo s. ricopr. finito)

Via d'uscita: considero il ricoprimento come sopra e prendo il suo raggio magico  $r$ .

Dico che  $r$  è il  $\delta$  che stavamo cercando nell'unif. cont.

Infatti, siano  $x$  e  $y$  in  $X$  t.c.  $d(x, y) < r$ . Allora

$$y \in B_r(x) \subseteq B_{\delta(z)}(z)$$

per un qualche  $z \in X$ . Ma allora

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f(z)) + d_Y(f(z), f(y)) \\ &\leq \varepsilon \qquad \qquad \qquad \leq \varepsilon \\ &\text{perché } x \text{ e } y \in B_{\delta(z)}(z) \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

Quindi se partivo con  $\frac{\varepsilon}{2}$  ottenevo  $\varepsilon$  alla fine.

**Dim 3** (Compattezza per ricopr. senza raggio magico).

Mi viene dato  $\varepsilon > 0$ . Ottengo  $\delta(x)$  come sopra pensando ad  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Considero il ricoprimento

$$\left\{ B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x) \right\}_{x \in X}.$$

Esiste un s. ricopr. finito

$$X = \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$$

Prendo  $\delta := \frac{1}{2} \min \{ \delta(x_1), \dots, \delta(x_n) \}$ . Dovrebbe andare bene.

Infatti: siano  $x$  e  $y$  in  $X$  con  $d(x, y) \leq \delta$ . Allora esiste  $i \in \{1, \dots, n\}$  t.c.

$$x \in B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$$

Ma allora  $y \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$ . Poiché  $x \text{ e } y \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$  concludo come sopra

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(y)) \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(Controllare con cura i fattori 2).

I fattori 2 sono ok. Aggiunti 3  $\delta(x_i)$  dopo video

**Ametrato dall'ultima volta** Se due norme  $\|x\|_1$  e  $\|x\|_2$  inducono la stessa convergenza, allora esistono  $A \geq a > 0$  tali che

$$a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq A \|x\|_1$$

**Dim.** Se così non fosse, allora (a meno di scambiare le due norme) esiste una succ.  $x_n$  t.c.

$$\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} \rightarrow 0$$

Per omogeneità posso supporre wlog che  $\|x_n\|_1 \equiv 1$ . Ma allora sappiamo che  $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$ , cioè  $x_n \rightarrow 0$  per la norma 2, ma allora  $x_n \rightarrow 0$  per la norma 1, il che è impossibile essendo  $\|x_n\|_1 \equiv 1$ .