

COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI

Def. Uno sp. metrico (X, d) si dice totalmente limitato se

$$\forall r > 0 \exists n \geq 1 \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ t.c. } X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$$

In tal caso $(x_1, \dots, x_n)$ si dice una r -rete.

Brutalmente: $x_1, \dots, x_n$ sono distributori di benzina e ognuno (ogni el. di X) ha un distributore a distanza $< r$.

Esercizio (facile, ma non ovvio) Totalmente lim. $\Rightarrow$ limitato

Esempio limitato $\nRightarrow$ tot. limitato

X = insieme infinito con distanza banale $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.
Ha diam = 1, ma non esiste r -rete con $r < 1$.

TEOREMA Sia (X, d) metrico.

Allora sono fatti equivalenti

- (i) (X, d) è completo + tot. limitato,
- (ii) (X, d) è compatto per successioni,
- (iii) (X, d) è compatto per ricoprimenti (ogni ricoprimento aperto ammette sottoricopr. finito)

Schema dim. $(ii) \Rightarrow$ completo $(ii) \Rightarrow$ tot. lim. $(i) \Rightarrow (ii)$
 $(i) \Leftrightarrow (ii)$

$(iii) \Rightarrow (ii)$

$(i) + (ii) \Rightarrow (iii)$

(ii) $\Rightarrow$ completo

H_p: compatto per successioni

Tesi: le successioni di Cauchy convergono

Dim. Sia $\{x_n\}$ di Cauchy. Per H_p ha s.succ. convergente, ma allora (vedi les. precedenti) tutta la succ. converge allo stesso limite.

(ic) $\Rightarrow$ totalmente limitato

Dim. La tesi è

$$\forall r > 0 \exists n \geq 1 \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ t.c. } X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_n(x_i)$$

Supponiamo per assurdo che sia falso. Allora

$$\exists r_0 > 0 \forall n \geq 1 \forall x_1, \dots, x_n \in X \text{ vale } \bigcup_{i=1}^n B_n(x_i) \not\supseteq X$$

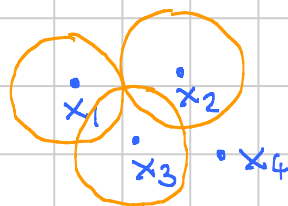
Costruisco una succ. x_n in questo modo:

$\rightarrow$ prendo $x_1 \in X$ a caso

$\rightarrow$ fissati $x_1, \dots, x_k$, prendo $x_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{r_0}(x_i)$

Per questa successione vale

$$(*) \quad d(x_i, x_j) \geq r_0 \quad \forall i \neq j.$$



Questa successione NON può avere s.succ. convergente perché sarebbero di Cauchy, il che va contro la (*).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Lemma (Procedimento diagonale) Sia

$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$ una famiglia di insiemi tutti con infiniti elementi. Allora esiste una succ. $\{m_k\} \subseteq N$ t.c. $m_k \in N_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $m_{k+1} > m_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dim (quasi ovvia) Prendo $m_0 \in \mathbb{N} = \mathbb{N}_0$ a caso.

Supponiamo di aver scelto $m_0, m_1, \dots, m_k$ e vogliamo scegliere $m_{k+1} \in \mathbb{N}_{k+1}$ tale che $m_{k+1} > m_k$. Questo è possibile perché $\mathbb{N}_{k+1}$ ha ∞ elementi.

Oss. La succ. del lemma precedente verifica

$$m_i \in \mathbb{N}_j \quad \text{per ogni } j \leq i.$$

Dim che (i) $\Rightarrow$ (ii) Prendo una succ. $\{x_n\}$ e devo trovare una s.succ. convergente.

Basta trovare una s.succ. di Cauchy e poi sfruttare la completezza.

Per trovare s.succ. di Cauchy uso la totale limitatezza e il procedimento diagonale.

$\rightarrow$ Pongo $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Scelgo $r=1$ e trovo una 1-rete

$$\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_1(y_i)$$

Almeno una di queste palle contiene x_n per infiniti indici n . Chiamo $\mathbb{N}_1$ questi infiniti indici.

$\rightarrow$ Scelgo $r = \frac{1}{2}$ e trovo una $\frac{1}{2}$ -rete

$$\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2}}(y_i)$$

(sia n sia y_i possono essere diversi da prima)

Almeno una di queste palle contiene x_n per infiniti indici di $\mathbb{N}_1$. Chiamo $\mathbb{N}_2$ questi indici.

$\rightarrow$ Analogamente ... scelgo $r = \frac{1}{k}$.. e chiamo $\mathbb{N}_k$...

Ora prendo x_{n_k} dove n_k è la succ. di indici data dal procedimento diagonale. Dico che è di Cauchy.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$, prendo k_0 tale che $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.
 Allora per ogni i e j con $i \geq k_0, j \geq k_0$
 vale che

$$x_{n_i} \in B_{\frac{1}{k_0}}(y) \quad x_{n_j} \in B_{\frac{1}{k_0}}(y)$$

← stesso y →

e quindi $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq \frac{2}{k_0} < \varepsilon$.

— 0 — 0 —

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Hip: compatto per ricoprimenti

Th: compatto per successioni.

Lemma Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una succ.

Supponiamo che esista $x_\infty \in X$ tale che per ogni $r > 0$
 vale che

$$x_n \in B_r(x_\infty) \text{ frequentemente}$$

Allora esiste s.succ. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Dim. Costruisco induttivamente la s.succ.

Scelgo x_{n_0} a caso. Dopo aver scelto $x_{n_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$
 scelgo $x_{n_{k+1}}$ in modo che $n_{k+1} > n_k$ e

$$d(x_{n_{k+1}}, x_\infty) \leq \frac{1}{k+1} \quad (x_{n_k} \rightarrow x_\infty)$$

Posso grazie all'ipotesi con $r = \frac{1}{k+1}$ (il frequentemente
 dice che posso avere indice $n_{k+1} > n_k$).

Dim. che (iii) $\Rightarrow$ (ii) Presa $\{x_n\}$ succ. qualunque, devo
 trovare s.succ. conv. Basta che trovi x_∞ che verifica
 le ipotesi del lemma. Devo quindi dim. che

$$\exists x \in X \quad \forall r > 0 \quad x_n \in B_r(x) \text{ frequentemente}$$

Suppongo che NON sia vera. Allora

$\forall x \in X \exists \underset{\uparrow r(x)}{r} > 0$ t.c. $x_n \in B_r(x)$ solo per un numero finito di indici.

Ora $\{B_{r(x)}(x)\}_{x \in X}$ sono un ricoprimento aperto di X .

Per ipotesi questo ammette un s.ricopr. finito, cioè

$$X = \bigcup_{i=1}^m B_{r_i}(y_i)$$

Ognuna di queste palle contiene gli el. della succ. x_n solo per un numero finito di indici, il che è male.

— o — o —

Esercizio

① (iii) $\Rightarrow$ limitato

Prendo $x_0 \in X$ a caso e considero il ricoprimento

$$\{B_m(x_0)\}_{m \in \mathbb{N}}$$

② (iii) $\Rightarrow$ tot. limitato

Prendo $r > 0$ (mi viene dato) e considero

$$\{B_r(x)\}_{x \in X}$$

Questo ammette s.ricopr. finito che dà la r -rete.

— o — o —