

Def. Sia X uno sp. vettoriale. Un prodotto scalare su X è una funzione $\dots \langle x, y \rangle \dots$

- bilineare
- simmetrico
- definito positivo ($\langle x, x \rangle \geq 0$ sempre con uguale $\Leftrightarrow x=0$)

Fatto : se $\langle x, y \rangle$ è un prodotto scalare, allora

$$n(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X$$

è una norma su X .

Def. Uno sp. di HILBERT è uno sp. vett. X sul quale è definito un prod. scalare che induce una norma che induce una distanza che lo rende un metrico completo.

Esempi di spazi metrici

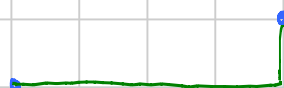
① Metrica banale X insieme qualunque

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases} \quad (\text{limitato e completo})$$

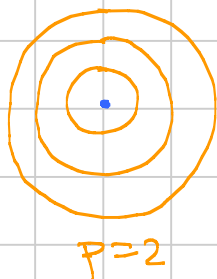
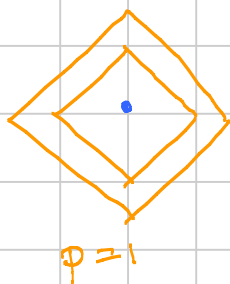
② $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea (è pure Banach e Hilbert)

③ $\mathbb{R}^n$ con la distanza MANHATTAN o TAXI DRIVER o TAXICAB.

$$d(x, y) := |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \dots + |y_n - x_n|$$



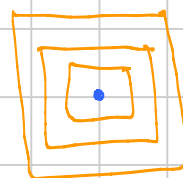
④ $\mathbb{R}^n$ con la distanza p -esima con $p \geq 1$ $\leadsto$ serve per la triangolare
 $d_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p \right)^{1/p}$
 $p=1 \leadsto$ TAXI DRIVER
 $p=2 \leadsto$ EUCLIDEA



Esercizio (non banale): dimostrare che d_p è una distanza e che solo per $p=2$ è un Hilbert.

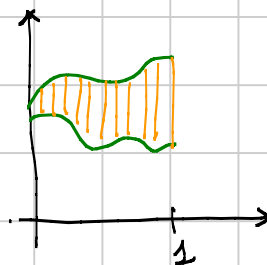
⑤ $\mathbb{R}^n$ con la distanza del sup.

$$d_\infty(x, y) := \sup \{ |y_i - x_i| : i \in \{1, \dots, n\} \}$$



⑥ $\mathbb{X} = \{ \text{funzioni } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitate} \}$

$$d(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0, 1] \}$$



Oss. Se non avessi messo limitate nella def. di $\mathbb{X}$, la distanza non sarebbe stata ben definita.

⑦ $\mathbb{X} := \{ \text{funzioni } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \}$

$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Oss. Se avessi messo integrabili invece di continue non era una distanza perché mancava (d1): due funzioni che differiscono in un solo pto avrebbero distanza 0.
 — 0 — 0 —

Def. Due distanze su uno stesso insieme si dicono EQUIVALENTI se inducono la stessa nozione di convergenza, cioè determinano le stesse funzioni continue

Prop. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, e sia $x_0 \in X$.

Allora sono fatti equivalenti

(i) (Continuità ε/δ)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$$

(ii) (Continuità per successioni)

Per ogni succ. $x_n \rightarrow x_0$ in X vale che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ in Y .

Dim. Stessa di Analisi 1 (rifare per esercizio).

Def. Sia X uno spazio vettoriale. Due norme n_1 ed n_2 in X si dicono equivalenti se esistono due costanti reali $A \geq a > 0$ tali che

↑ importante

$$a n_2(x) \leq n_1(x) \leq A n_2(x) \quad \forall x \in X.$$

Teorema 1 Due norme sono equiv. nel senso di a, A se e solo se inducono la stessa nozione di conv.

Teorema 2 In uno spazio vett. di dim. finita tutte le norme sono equivalenti.

Dim 2 Idea pericolosa. Chiamo $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ le due norme.

Considero

$$\varphi(x) := \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \quad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

È una funzione 0-omogenea, quindi il suo sup e inf su $X \setminus \{0\}$ coincidono con quelli su una qualunque sfera unitaria (rispetto alla $\|x\|_1$ o $\|x\|_2$).

L'inf lo chiamo α e il sup lo chiamo A , ed essendo min/max sono reali e > 0 .

Problemi: continuità di φ e compattezza delle sfere

Step 1 Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di X . Dato $x \in X$ lo posso scrivere come

$$x = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

in modo unico.

Pongo

$$\|x\| := (c_1^2 + \dots + c_n^2)^{1/2}$$

e la chiamo norma euclidea rispetto alla base scelta.

Mi basta ora dimostrare che una qualunque norma strana $\| \| x \| \|$ è equivalente alla euclidea $\|x\|$.

Step 2 Dimostro la parte dall'alto, cioè

$$\exists A > 0 \text{ t.c.} \quad \| \| x \| \| \leq A \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\| \| x \| \| = \| \| c_1 e_1 + \dots + c_n e_n \| \| \leq |c_1| \cdot \| \| e_1 \| \| + \dots + |c_n| \cdot \| \| e_n \| \|\}$$

$$\begin{aligned} &\leq (c_1^2 + \dots + c_n^2)^{1/2} \cdot (\| \| e_1 \| \|^2 + \dots + \| \| e_n \| \|^2)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{=} \|x\| \cdot \underbrace{\| \| e_1 \| \|^2 + \dots + \| \| e_n \| \|^2}_{A^2}^{1/2} \\ &= \|x\| \cdot A \end{aligned}$$

Step 3 Dimostro che la funzione $x \rightarrow \|x\|$ è continua rispetto alla $\|x\|$.

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \leq A \cdot \|x - y\|$$

$\uparrow$ triangolare $\uparrow$ step 2

Step 4 Considero $\varphi(x) := \frac{\|x\|}{\|x\|}$ e osservo che questa è

continua in $X \setminus \{0\}$ rispetto alla $\|x\|$. La sfera $\|x\| = 1$ è compatta rispetto alla $\|x\|$, quindi sulla sfera $\varphi(x)$ assume max e min e inoltre il min è > 0 perché è il valore assunto in un p.to.

— o — o —

Dim. tes 1. Se esistono a e A , allora la nozione di coun. è la stessa.

Leggermente meno evidente è il viceversa.

— o — o —