

- $X \rightarrow$ insieme
 $\rightarrow$ spazi metrici
 $\rightarrow$ spazi di BANACH
 $\rightarrow$ spazi di Hilbert
 $\rightarrow \mathbb{R}^n$

Spazi metrici Sia X un insieme ($\neq \emptyset$)

Def. Una DISTANZA su X è una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica 4 proprietà

- (d1) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in X^2$,
 (d2) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$,
 (d3) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $(x, y) \in X^2$, (simmetria)
 (d4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $(x, y, z) \in X^3$.
 $\uparrow$ disug. triangolare

Def. Uno sp. metrico è una coppia (X, d) con X insieme e d distanza su X .

Oss. Occorre verificare sempre anche

(d0) d è definita per ogni $(x, y) \in X^2$

Oss. Dalla (d4) seguono anche disuguaglianze del tipo

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

Dim $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (d4)

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (d4)

Mettendo insieme ho la tesi. $\square$

Dalla distanza seguono le palle, il linguaggio topologico, la convergenza

Def. (Palle aperte/chiusse) Sia (X, d) metrico.

Allora

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \quad \text{palla aperta}$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \quad \text{palla chiusa}$$

con centro in $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$.

Esercizio • Se una palla è contenuta strett. in un'altra, ha necess. il raggio $< ?$
• Ha necessariamente raggio $\leq ?$

Def. Sia (X, d) metrico e sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione. Si dice che

$$x_n \rightarrow x_\infty \in X$$

se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_\infty) = 0$$

$\uparrow$ limite di numeri

In modo equivalente

$\forall r > 0 \quad x_n \in B_r(x_\infty) \text{ definitivamente}$

Linguaggio topologico Dato $x_0 \in X$ e un sottoinsieme $A \subseteq X$ si definisce quando

$$\rightarrow x_0 \in \text{Int}(A) \quad [\exists r > 0 \text{ t.c. } B_r(x_0) \subseteq A]$$

$$\rightarrow x_0 \in \text{Clos}(A) \quad [\forall r > 0 \quad B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset]$$

$$\rightarrow x_0 \in \partial A$$

$\rightarrow x_0$ è isolato in A oppure di accumulazione

Def Sia (X, d) metrico e sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione.
Si dice che x_n è una succ. di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 \forall m \geq m_0 d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Prop. Sia (X, d) metrico.

Allora valgono i seguenti fatti.

- (i) Le successioni che hanno limite sono di Cauchy
- (ii) Le successioni di Cauchy sono limitate (contenute in una palla).
- (iii) Se una succ. di Cauchy ha una s.succ. conv., allora converge fatta quanta (allo stesso limite).

Dim. (i) e (ii) per esercizio.

(iii) Sia x_n di Cauchy e sia $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in X$.

Dico che $x_n \rightarrow x_\infty$.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ in maniera tale che

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0.$$

Scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_{n_k}, x_\infty) \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

Wlog posso assumere che $n_{k_0} \geq m_0$.

Allora dico che

$$d(x_n, x_\infty) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_{k_0}$$

Infatti

$$d(x_n, x_\infty) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_{k_0}})}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} + \underbrace{d(x_{n_{k_0}}, x_\infty)}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon}$$

— o — o —

Def. Uno spazio metrico (X, d) si dice **COMPLETO** se tutte le succ. di Cauchy hanno limite.

Def. Si dice diametro di uno spazio metrico (X, d) la quantità

$$\text{diam}(X) := \sup \{ d(x, y) : (x, y) \in X^2 \} \begin{matrix} \nearrow \in [0, +\infty) \\ \searrow = +\infty \end{matrix}$$

Def. Uno spazio metrico (X, d) si dice **limitato** se

$$\text{diam}(X) < +\infty$$

Equivalentemente, se

$$\exists R \geq 0 \exists x_0 \in X \text{ t.c. } X = B_R(x_0)$$

Dim: esercizio.

Def. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici.

Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

Si dice che f è

- Lipschitziana se

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall (x, y) \in X^2 \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$$

- Hölderiana se

$$\exists H \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in (0, 1] \forall (x, y) \in X^2 \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq H d_X(x, y)^\alpha$$

- unif. cont. se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in X^2$ vale
 $d_X(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$

Oss. $\text{Lip} \Rightarrow \text{U.C.}$ $\text{Höld} \Rightarrow \text{U.C.}$

$\text{Lip} \Rightarrow \text{Höld}$ se (X, d) è LIMITATO

$$[d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$$

$$= L \underbrace{d_X(x, y)^{1-\alpha}}_{\leq \text{diam}(X)^{1-\alpha}} d_X(x, y)^\alpha$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Hölder}}$$

Def. Sia X uno sp. vettoriale. Una NORMA su X è una funzione

$$n: X \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$(n1) \quad n(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in X$$

$$(n2) \quad n(x) = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0$$

$$(n3) \quad n(\lambda x) = |\lambda| n(x) \quad \text{per ogni } x \in X \text{ e per ogni } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(n4) \quad n(x+y) \leq n(x) + n(y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in X^2.$$

Fatto fondamentale. Se X è uno sp. vett. e $n: X \rightarrow \mathbb{R}$ è una norma, allora

$$d(x, y) := n(x - y)$$

è una distanza su X .

Dim. Banale verifica di $(d1), (d2), (d3), (d4)$.

Def. Uno sp. di BANACH è uno sp. vett. X sul quale è definita una norma che lo rende un metrico completo.