

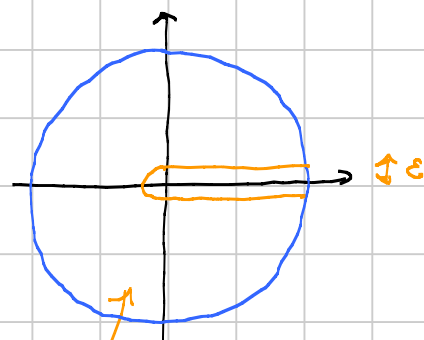
Oss. Si può dim. Stokes sotto ipotesi più generali su S .
Basta che per ogni punto del supporto di S esista un intorno in cui S si scrive come immagine di un certo Ω , che può variare da punto a punto.

(Solita idea delle partizioni dell'unità)

Oss. Il teo. di cambio di variabili negli integrali multipli, così come enunciato e dim., non funziona nemmeno per le polari nel piano!!
Il problema è almeno nell'origine dove il determinante di J si annulla.

Per rimediare basta restringere la zona di integrazione lasciando fuori l'origine e un raggio (avendo supposto l'invertibilità).

Poi mandando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e se la funzione è limitata non ci sono problemi.



Qui funzionano le ipotesi

— o — o —

INVERSIONE DEL ROTORE

Problema: dato un campo $\vec{E}$ in $\mathbb{R}^3$, trovare $\vec{F}$ tale che

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$$

⊥ Se $\text{div } \vec{E} \neq 0$ non c'è speranza

② Se $\text{div } \vec{E} = 0$, le cose possono andare comunque male
Ad esempio il solito

$$\vec{E} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

ha $\text{div } \vec{E} = 0$, ma non è il rotore di nulla nell'intorno
di ogni superficie chiusa che racchiude l'origine
(vedi lezioni 67 o 68)

③ Se $\text{div } \vec{E} = 0$ e la zona Ω è un parallelepipedo
(o comunque stellata, o più in generale ...), allora
posso trovare $\vec{F}$ con l'algoritmo.

$$\vec{E} = (A, B, C) \quad \vec{F} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \text{ e voglio}$$

$$\hat{C}_y - \hat{B}_z = A, \quad \hat{A}_z - \hat{C}_x = B, \quad \hat{B}_x - \hat{A}_y = C$$

$$\textcircled{1} \text{ Scelgo } \hat{C} \equiv 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\hat{B}_z = A \quad \hat{A}_z = B$$

$$\hat{B} = -\bar{A} + \varphi(x, y) \quad \hat{A} = \bar{B} + \psi(x, y)$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
primitive di A e B risp. z

② Scelgo $\psi \equiv 0$ e sostituisco nella 3^a eq.

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = -\bar{A}_x + \varphi_x - \bar{B}_y = C$$

$$\rightsquigarrow \varphi_x(x, y) = \bar{A}_x + \bar{B}_y + C$$

Questa riesco a risolverla se RHS non dipende da z

$$(RHS)_z = \bar{A}_{xz} + \bar{B}_{yz} + C_z = A_x + B_y + C_z = 0 \quad \text{div } \vec{E} = 0$$
$$(\bar{A}_z)_x = A_x \quad \text{☺}$$

Oss 1 Abbiamo usato che $\vec{E}$ è di classe C^1 .

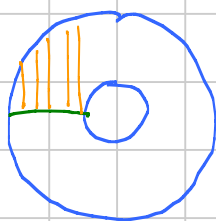
Oss. Dove è intervenuta la topologia?

Come faccio a definire / scegliere la primitiva di A rispetto alla variabile z ?

$$\bar{A}(x, y, z) := \int_0^z A(x, y, t) dt$$

La possibilità di integrare da un livello fisso c'è solo nei parallelepipedi.

In una corona circolare ci sarebbero problemi...
volendo superabili!



... capire perché diventano insormontabili sulla corona sferica.

— o — o — o —
Laplaciano in coordinate polari

Trovare tutte le funzioni radiali nel piano t.c.

$$\Delta u(x, y) = 0$$

Ponendosi su Δ in coord. polari

$$u(x, y)$$

$$v(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$$

$$\Delta u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Quale operazione su v fornisce risultato analogo?

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$V_p = u_x x_p + u_y y_p = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$$

$$V_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = u_x (-p \sin \theta) + u_y (p \cos \theta)$$

Visto a suo tempo

$$V_p^2 + \frac{1}{p^2} V_\theta^2 = u_x^2 + u_y^2$$

Calcolo le derivate seconde

$$V_{pp} = u_{xx} x_p \cos \theta + u_{xy} y_p \cos \theta + u_{yx} x_p \sin \theta + u_{yy} y_p \sin \theta$$

$$= u_{xx} \cos^2 \theta + 2 u_{xy} \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$$

$$V_{\theta\theta} = (u_{xx} x_\theta + u_{xy} y_\theta) (-p \sin \theta) + u_x (-p \cos \theta) + (u_{yx} x_\theta + u_{yy} y_\theta) (p \cos \theta) + u_y (-p \sin \theta)$$

$$= u_{xx} p^2 \sin^2 \theta - 2 u_{xy} p^2 \cos \theta \sin \theta - u_x p \cos \theta + u_{yy} p^2 \cos^2 \theta - u_y p \sin \theta$$

$$V_{pp} + \frac{1}{p^2} V_{\theta\theta} = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{p} V_p$$

Morale

$$u_{xx} + u_{yy} = V_{pp} + \frac{1}{p^2} V_{\theta\theta} + \frac{1}{p} V_p$$

Laplaciano
in coord. polari

Le funzioni radiali le posso pensare come $V(p)$, quindi hanno Laplaciano nullo se e solo se

$$V_{pp} + \frac{1}{p} V_p = 0$$

Posto $f = V_p$ devo risolvere $f' = -\frac{1}{p} f$

$$\int \frac{1}{f} df = \int -\frac{1}{p} dp \rightsquigarrow \log f = -\log p + c$$

$$\rightsquigarrow \log f = \log\left(\frac{k}{p}\right)$$

$$\rightsquigarrow f(p) = \frac{k}{p} \rightsquigarrow v_p = \frac{k}{p} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \boxed{v(p) = k \log p + c}$$

Se le voglio definire su $\mathbb{R}^2$ (tutto $\mathbb{R}^2$) restano solo le costanti ($k=0$)

— o — o —

Variante nello spazio :

→ si calcola il Laplaciano in coord. sferiche (una volta nella vita) poi si cerca su wiki

→ Restringendosi alle sole radiali viene

$$\Delta u = v_{pp} + \frac{2}{p} v_p \quad \leftarrow \text{viene } n-1 \text{ in dim } n$$

→ si risolve come sopra

$$\dots \log f = \log\left(\frac{k}{p^2}\right) \rightsquigarrow f = \frac{k}{p^2}$$

$$\rightsquigarrow v_p = \frac{k}{p^2} \rightsquigarrow v(p) = \boxed{\frac{k}{p}} + c$$

↑
i potenziali elettrici divergono come $\frac{1}{p}$ nell'origine...

— o — o —