

DIMOSTRAZIONE DI STOKES

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)$$

Notazioni $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme come nel teo. della divergenza
- Φ di classe C^1 in un aperto $\Omega' \supseteq \Omega$ con $J\Phi$ di rango due in ogni punto
- $\vec{n}$ è il vettore normale indotto dalla parametrizzazione

$$\vec{n} = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$$

Il bordo di Ω , percorso con il verso giusto, è una curva (o una unione di curve)

$$\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$$

$$\gamma(t) = (u(t), v(t))$$

Supponiamo γ di classe C^1 (almeno a tratti)

$$\vec{E}(x,y,z) = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$$

dove A, B, C sono di classe C^1 almeno in un intorno del supporto di $S = \Phi(\Omega)$.

Per un fatto noto sotto queste ipotesi la curva

$$\Phi \circ \gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

percorre ∂S con il verso giusto.

Idea della dim:

- ① riscrivo LHS come int. doppio su Ω
- ② " RHS " " lungo $\partial\Omega$
- ③ mostro che sono uguali per teo. div.

1 Riscrivo LHS $\text{rot } \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (C_y - B_z) M_1 + (A_z - C_x) M_2 + (B_x - A_y) M_3$$

$$\begin{pmatrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = \\ = (Y_u Z_v - Z_u Y_v, Z_u X_v - X_u Z_v, X_u Y_v - Y_u X_v)$$

$$\text{LHS} = \iint_{\Omega} \{ (C_y - B_z)(Y_u Z_v - Z_u Y_v) + (A_z - C_x)(Z_u X_v - X_u Z_v) + (B_x - A_y)(X_u Y_v - Y_u X_v) \} du dv$$

$$= \iint_{\Omega} 12 \text{ simpatia termini}$$

... quelli con B sono

$$- B_z Y_u Z_v + B_z Z_u Y_v + B_x X_u Y_v - B_x Y_u X_v$$

$$B_z (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) Y_u(u,v) Z_v(u,v)$$

2 Riscrivo RHS $\int_{\partial\Omega^+} (A dx + B dy + C dz)$

$$(x(t), y(t), z(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))$$

$$\text{RHS} = \int_a^b A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + B(\dots) \dot{y}(t) + C(\dots) \dot{z}(t)$$

$$= \int_a^b A(X_u \dot{u} + X_v \dot{v}) + B(Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v}) + C(Z_u \dot{u} + Z_v \dot{v})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b (A X_u + B Y_u + C Z_u) \dot{u} + (A X_v + B Y_v + C Z_v) \dot{v} \\
&= \int_{\partial\Omega^+} \underbrace{(A X_u + B Y_u + C Z_u)}_D du + \underbrace{(A X_v + B Y_v + C Z_v)}_E dv
\end{aligned}$$

[3] Spero in Gauss-Green nella forma

$$\int_{\partial\Omega^+} D du + E dv = \iint_{\Omega} (E_u - D_v) dx dy$$

Per concludere devo calcolare $E_u - D_v$ e sperare che venga lo stesso del punto ①.

Limitiamoci ai termini con B

$$E_u - D_v = \dots = \frac{\partial B}{\partial u} Y_v + \cancel{B Y_{uv}} - \frac{\partial B}{\partial v} Y_u - \cancel{B Y_{uv}}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{chain rule}}{=} (B_x X_u + B_y Y_u + B_z Z_u) Y_v \\
&\quad - (B_x X_v + B_y Y_v + B_z Z_v) Y_u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_x X_u Y_v + \cancel{B_y Y_u Y_v} + B_z Z_u Y_v \\
&\quad - B_x X_v Y_u - \cancel{B_y Y_v Y_u} - B_z Z_v Y_u
\end{aligned}$$

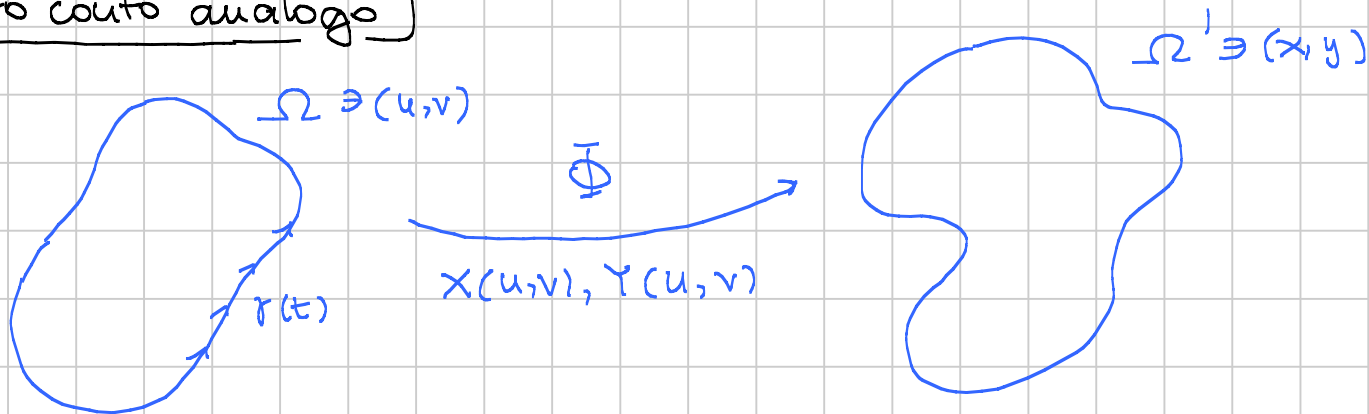
$$- B_z Y_u Z_v + B_z Z_u Y_v + B_x X_u Y_v - B_x Y_u X_v$$

Coincide con quello che volevo !!!



— o — o —

Altro conto analogo



Sia $f(x, y)$ una funzione $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$

Voglio calcolare con il teo. della div. $\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy$

Cerco un campo $\vec{E}$ la cui divergenza sia $f(x, y)$,
ad esempio

$$\vec{E}(x, y) = (F(x, y), 0) \quad \text{con } F_x(x, y) = f(x, y)$$

$$\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} \text{div } \vec{E} dx dy = \int_{\partial \Omega'} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$$\iint_{\Omega'} \text{div } \vec{E} = \int_{\partial \Omega'^+} A dy - B dx$$

$$= \int_{(\partial \Omega')^+} F dy$$

Il bordo è parametrizzato da $(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$
 $x(t)$ $y(t)$

$$= \int_a^b F(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t))) (Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v})$$

$$= \int_{\partial \Omega'^+} (F Y_u) du + (F Y_v) dv$$

D E

Ora applico il teo. della divergenza su Ω

$$\int_{\partial\Omega^+} Ddu + E dv = \iint_{\Omega} (Eu - Dv) dx dy$$

$$= \int_{\Omega} \{ (F Y_v)_u - (F Y_u)_v \} du dv$$

$$= \int_{\Omega} \{ (F_x X_u + \cancel{F_y Y_u}) Y_v + \cancel{F Y_{vu}} - (F_x X_v + \cancel{F_y Y_v}) Y_u - \cancel{F Y_{uv}} \}$$

$$= \int_{\Omega} F_x (X_u Y_v - X_v Y_u) du dv$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto

$$\iint_{\Omega'} f(x,y) dx dy = \dots = \iint_{\Omega} f(X(u,v), Y(u,v)) \underbrace{(X_u Y_v - X_v Y_u)}_{\text{Det } J\Phi(u,v)} du dv$$

Questo dimostra il cambio di variabili per integrali doppi.

Osservazioni

- abbiamo supposto che $\partial\Omega'$ fosse param. da $\Phi(t)$ con il verso giusto (altrimenti serve un segno -)
- NON abbiamo supposto che $\text{Det } J\Phi$ abbia segno costante ma solo che conservi l'orientazione dei bordi.
- Abbiamo supposto tanta regolarità di Φ (derivate seconde fino al bordo) e di f (forse almeno continua per fare la primitiva).
- Abbiamo usato uno strumento avanzato.

— o — o —

Oss. In entrambe le dim. abbiamo usato il PULL-BACK di forme differenziali.

1^a dim.: avevamo la forma $A dx + B dy + C dz$ in $\mathbb{R}^3$

La vogliamo "tirare indietro in $\mathbb{R}^2$ " usando la Φ

Come forma indietro?

Rigorosamente come nella dim.

Brutalmente come mettere $X(u,v)$, $Y(u,v)$, $Z(u,v)$ al posto di $x, y, z \dots$

$$A(X(u,v) \dots) (X_u du + X_v dv) + B(\dots) (Y_u du + Y_v dv) + \dots$$

$$= \underbrace{(A X_u + B Y_u + C Z_u) du + (A X_v + B Y_v + C Z_v) dv}_{\text{PULL BACK FORMA INIZIALE}}$$

e vale la proprietà

$$\int_{\gamma} \Phi_* \omega = \int_{\Phi_* \gamma} \omega$$