

QUATTRO STRATEGIE PER IL CALCOLO DI UN FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

Situazione classica. Sono dati

- una superficie S
- una orientazione $\vec{n}$
- un campo di vettori $\vec{E}$

Voglio calcolare l'integrale di flusso

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Quattro possibili approcci

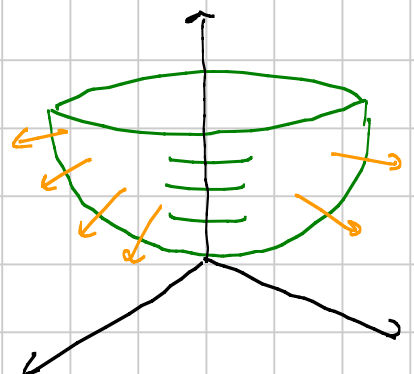
- ① utilizzo banale della definizione
- ② Stokes con inversione del rotore
- ③ Stokes con cambio superficie
- ④ Teo. divergenza con i tappi.

Consideriamo per esempio il campo

$$\vec{E}(x, y, z) = (2x + yz, z - y, 3x^2 - z)$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

con orientazione esterna.



- ① Uso la definizione
- parametrizzo S
 - calcolo (M_1, M_2, M_3)
 - controllo il verso
 - integro

$$\pm \iint_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

$\uparrow$
 punta verso l'alto,
 quindi devo
 cambiare segno

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= - \iint_{\Omega} \left\{ \underbrace{(2u + v(u^2 + v^2))}_A \underbrace{(-2u)}_{M_1} \right. \\ &\quad + \underbrace{(u^2 + v^2 - v)}_B \underbrace{(-2v)}_{M_2} \\ &\quad \left. + \underbrace{(3u^2 - u^2 - v^2)}_C \cdot \underbrace{1}_{M_3} \right\} du dv \\ &= \text{integrale che si fa (sfruttare le simm.)!} \end{aligned}$$

- Vantaggi / svantaggi:
- funziona sempre (con alcune ipotesi speciali su E)
 - occorre parametrizzare S .
 - occorre calcolare (M_1, M_2, M_3)
 - l'integrale finale è un integrale doppio

— o — o —

② Stokes con conversione del rotore

- spero che $\vec{E}$ sia il rotore di un certo $\vec{F}$
- trovo $\vec{F}$ tale che $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$
- a quel punto uso Stokes

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)$$

$\vec{F} = (A, B, C)$

Nell'esempio $\vec{E} = (2x + yz, z - y, 3x^2 - z)$

$\text{div } \vec{E} = 2 - 1 - 1 = 0$ 😊. Su tutto $\mathbb{R}^3$ questo implica che $\vec{E}$ è il rotore di un certo $\vec{F}$

Cerco $\vec{F} = (A, B, C)$. Inventare il rotore significa risolvere

$$B_z - C_y = 2x + yz$$

$$C_x - A_z = z - y$$

$$A_y - B_x = 3x^2 - z$$

Algoritmo: ① Metto 0 una componente a piacere, ad esempio $A \equiv 0$. La 2ª e 3ª diventano

$$C_x = z - y$$

$$C = zx - yx + \varphi(y, z)$$

$$B_x = z - 3x^2$$

$$B = zx - x^3 + \psi(y, z)$$

② Metto 0 una a scelta tra φ e ψ , ad esempio $\varphi(y, z) \equiv 0$.

Sostituisco B e C nella 1ª:

$$\underbrace{\cancel{x} + \psi_z}_{B_z} - \underbrace{\cancel{x}}_{-C_y} = \cancel{2x} + yz$$

Dove succedere
che se we vanno
le x

③ Trovo $\psi(y, z) = \frac{1}{2} y z^2$

Conclusioni

$$\vec{F}(x,y,z) = (0, zx - x^3 + \frac{1}{2} yz^2, zx - yx)$$

Verifico con le derivate che effett. rot $\vec{F} = \vec{E}$
Non resta che calcolare

$$\int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)$$

Devo parametrizzare ∂S^+

$$\gamma(t) = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \quad \text{questa ha l'orientazione sbagliata!!}$$

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= - \int_0^{2\pi} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{0} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{(-\sin \theta)} + \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{(\cos \theta - \cos^3 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta)} \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{\cos \theta} \right. \\ &\quad \left. + \underset{\substack{\uparrow \\ C}}{(-\dots)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{0} \right\} d\theta \\ &= \text{si fa} \end{aligned}$$

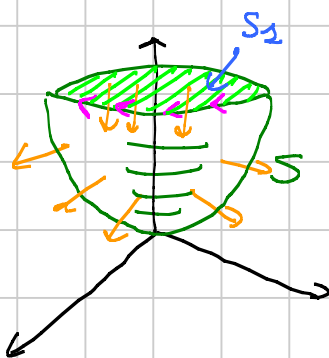
Vantaggi / svantaggi : $\rightarrow$ serve $\text{div } \vec{E} = 0$
 $\rightarrow$ occorre inventare il rotore
 $\rightarrow$ occorre parametrizzare ∂S^+
 $\rightarrow$ l'integrale finale è in una variabile.

— o — o —

3) Stokes senza invertire il rotore

- spero che $\vec{E}$ sia il rotore di un certo $\vec{F}$
- scelgo un'altra superficie S_1 con lo stesso bordo di S
- calcolo il flusso attraverso S_1 .

$$\begin{aligned}\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma \\&= \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds \\&= \int_{\partial S_1} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds \\&= \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma \\&= \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma\end{aligned}$$



Nell'esempio so che $\vec{F}$ esiste perché $\text{div } \vec{E} = 0$. Uso come S_1 la base superiore orientata verso il basso, cioè con $\vec{n} = (0, 0, -1)$.

Non resta che calcolare

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{terza comp.} \\ \text{di } E}}{-C} d\sigma = - \int_{S_1} (3x^2 - z) d\sigma$$

$$= - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (3x^2 - 1) dx dy = \text{davvero immediato.}$$

Vantaggi / svantaggi : → serve $\text{div } \vec{E} = 0$
→ non serve invertire il rotore
→ l'integrale finale è doppio
— 0 — 0 —

4 Teorema della divergenza con i tappi

- chiudo la superficie aggiungendo i tappi
- applico il teorema della divergenza

Uso come tappo la S_2 di prima.

Chiamo V il solido di cui è bordo.

Applico il teo. della divergenza:

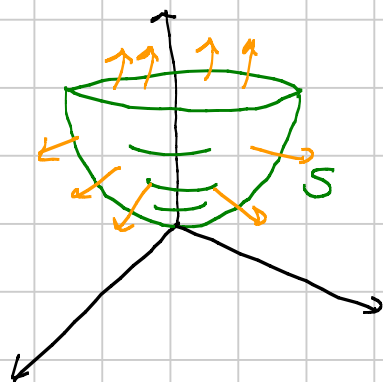
$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑
normale esterna a V

$$= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑
coincide con
quella voluta

↑
(0,0,1)



Viene lo stesso conto di prima perché $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

Vantaggi / svantaggi: → non serve che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
→ occorre calcolare i tappi
→ ci si riduce ad un integrale triplo + gli integrali di sup. sui tappi.

Oss. Se avessi preso

$$\vec{E} = (2x + yz + \sin x^6, z - y, 3x^2 - z)$$

Le strategie 2 e 3 non funzionavano ($\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$).
La 4 funzionava ugualmente e l'integrale triplo era 0 per simmetria.

— 0 — 0 —