

ORIENTAZIONE DEL BORDO DI UNA SUPERFICIE

Ingrediente di partenza: superficie orientata con bordo

Ipotesi classiche:

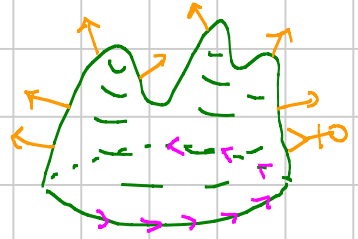
→ la superficie è parametrizzata

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

→ Φ è di classe C^1 e rango $J\Phi = 2$ in

ogni p.to $(\leadsto (M_1, M_2, M_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v \neq 0)$

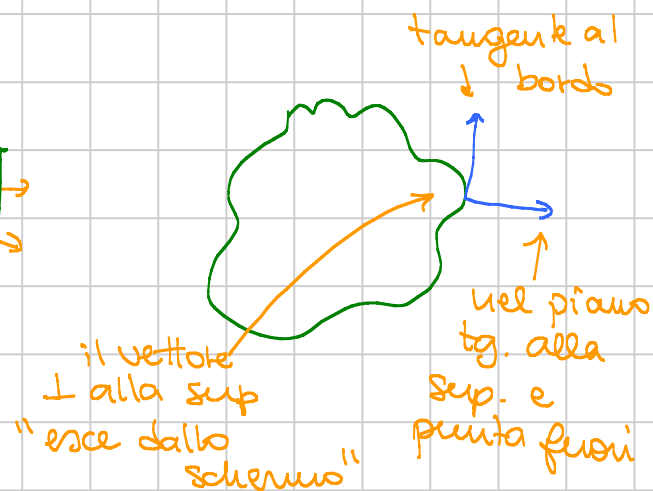
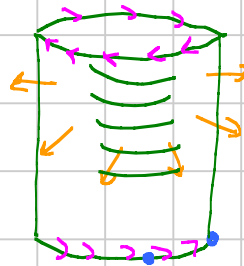
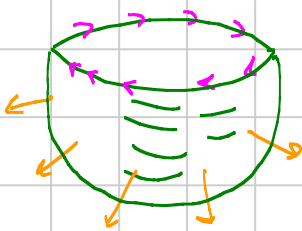
→ Φ è iniettiva almeno rispetto a $\text{Int}(\Omega)$



Una orientazione della sup. è una scelta del vettore canonico normale tra $\pm (M_1, M_2, M_3)$

Il bordo della sup. è per definizione $\Phi(\partial\Omega)$

Def. L'orientazione canonica del bordo della sup. è il verso di percorrenza di un giro in piedi secondo la direzione del vettore normale alla sup. che percorre il bordo avendo la sup. a sinistra.



Più rigorosamente: i 3 vettori

→ normale esterna alla sup. nel punto del bordo

→ tangente al bordo

→ normale alla superficie

sono una base di $\mathbb{R}^3$ orientata come la canonica.

Fatto che si verifica

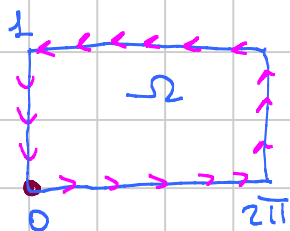
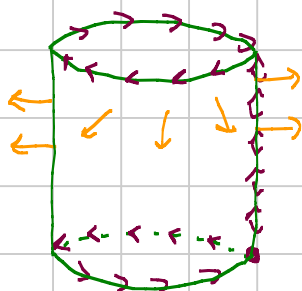
Se Φ parametrizza. $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è tale che (M_1, M_2, M_3) è l'orientazione della sup., allora l'orientazione del bordo è quella che proviene percorrendo $\partial\Omega$ in modo da lasciare Ω a sx.

Esempio cilindro

$$\Phi(\theta, u) = (\cos\theta, \sin\theta, u) \quad (\theta, u) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

(vettore normale esterno)



Esistono dei tratti che non sono vero bordo della superficie e vengono percorsi con verso opposto in questo caso 2 volte.

— o — o —

TEOREMA DEL ROTORE (teorema di Stokes)

Sia S una superficie orientata.

Sia $\vec{E}$ un campo di vettori definito almeno in un intorno del supporto di S .

Allora sotto certe ipotesi vale che

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

orient. di S

flusso di $\text{rot } \vec{E}$ attraverso S

bordo di S

integrale curvilineo di una funzione

versore tangente a ∂S nel verso indicato come sopra

Riscrittura di LHS e RHS : $E = (A, B, C)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rot } \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (C_y - B_z) M_1 + (A_z - C_x) M_2 + (B_x - A_y) M_3$$

Passiamo al RHS : supponiamo di aver parametrizzato ∂S con una curva (o più curve)

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in [a, b]$$

che lo percorre con il verso giusto. Allora

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_a^b (A \dot{x} + B \dot{y} + C \dot{z}) dt$$

$\uparrow$
 $A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t)$

$$= \int_{\gamma} (A dx + B dy + C dz)$$

$$= \int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)$$

$\uparrow$
bordo con il verso
scelto bene

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)$$

Oss. Di solito in fisica si enuncia dicendo che il flusso del rotore attraverso una superficie è uguale alla circuitazione del campo lungo il bordo.

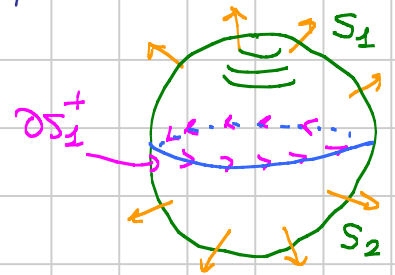
Corollario Il flusso di un rotore attraverso una superficie chiusa è uguale a 0.

(occhio: si intende chiusa una superficie senza il bordo, ad esempio una sfera, o un cilindro con le basi comprese)

Dim. brutale: nella formula di Stokes "non c'è il RHS"

Dim. meno brutale Divido la sup. in 2 e applico Stokes nelle due parti

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle dS = \int_{S_1} \dots + \int_{S_2} \dots$$



$$= \int_{\partial S_1} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle dS + \int_{\partial S_2} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle dS$$

sono lo stesso, ma
con i 2 τ opposti.

Oss. Posto $\vec{F} = \text{rot } \vec{E}$, posso applicare il teo. della div.
Nell'esempio della sfera troverei

$$\int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \iiint_B \text{div } \vec{F} dx dy dz$$

$\uparrow$ palla

$$\text{Ma } \text{div } \vec{F} = \text{div} (\text{rot } \vec{E}) = 0.$$

Esempio (La solita col rotore)

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

Con qualche conto si vede che $\text{div}(\vec{E}) = 0$

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{(\quad)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2x^2}{(\quad)^{5/2}} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

e analogo per le altre componenti.

Quindi

$$\iiint_B \text{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = 0$$

"

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \, d\sigma > 0 \quad !!!$$

$\uparrow$
 $(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Dove sta il guaio: che nel centro di B il conto della $\text{div} \vec{E}$ non ha senso.