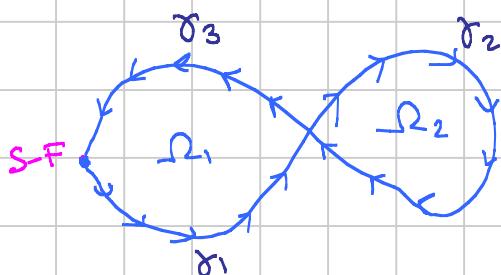


Esempio 1 Cautela con le formule per l'area.
Cosa otterremo se calcolo

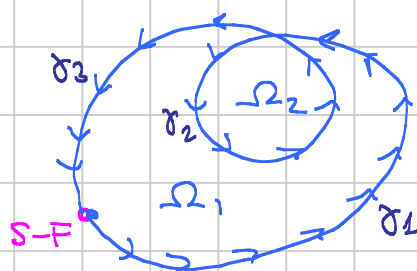
$$\int_{\gamma} x \, dy$$

(formula per l'area)

dove γ è una delle curve in figura?



$$\text{Area}(\Omega_1) - \text{Area}(\Omega_2)$$



$$\text{Area}(\Omega_1) + 2 \text{Area}(\Omega_2)$$

$$\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_3} x \, dy = \text{Area}(\Omega_1)$$

$$\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_3} x \, dy = \text{Area}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

$$\int_{\gamma_2} x \, dy = -\text{Area}(\Omega_2)$$

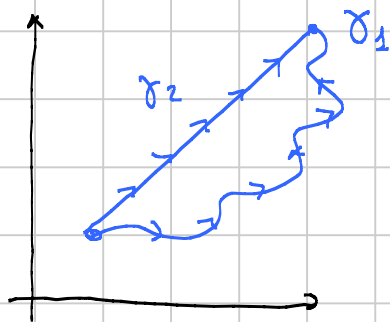
↑
verso sbagliato

$$\int_{\gamma_2} x \, dy = \text{Area}(\Omega_2)$$

↑
verso corretto.

Esempio 2 Rapporto con le forme diff. rivisitato.

Consideriamo la forma $\omega = \underbrace{(x + e^y)}_D dy + \underbrace{(\log x + y)}_C dx$



$$\text{Dimostrare che } \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

→ All'antica: la forma è chiusa nel ± 0 quadrante, quindi esatta, quindi tesi.

$$\rightarrow \int_{\partial\Omega^+} C dx + D dy = \iint_{\Omega} (D_x - C_y) dx dy = 0 = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

(chiusura)

Oss. Nuova interpretazione di forma chiusa $\Rightarrow$ integrale su curve omotope con estremi uguali coincide

Se ω non è chiusa, sappiamo fare la differenza tra i due integrali.

Esempio 3 Coordinate polari e integrali curvilinei.

Vogliamo integrare $f(x,y)$ sulla palla con centro in $(0,0)$ e raggio R dato.

$$\iint_{B_R} f(x,y) dx dy = \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta f(p \cos \theta, p \sin \theta) p$$

$$\int_{C_p} f(x,y) ds$$

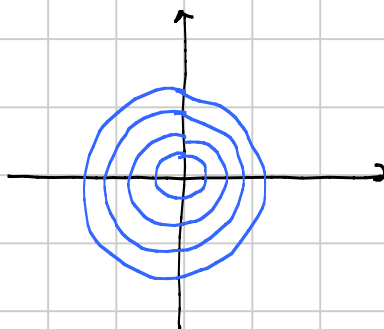
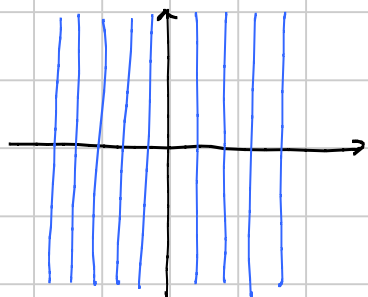
"
circonferenza di raggio p

Una parametrizzazione di C_p è $(p \cos \theta, p \sin \theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

x y

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = p d\theta$$

$\rightarrow$ Delirio 1 L'integrale in coord. polari è un Fubini-Tonelli storto !!!



Prima integro lungo le singole C_p , poi integro in dp , cioè in "d circonferenza"

$\rightarrow$ Delirio 2 Possiamo

$$\varphi(r) = \iint_{B_r} f(x,y) dx dy$$

$B_r \leftarrow$ raggio variabile

Voglio calcolare $\varphi'(r)$.

Soluzione : scrivo in coord. polari e poi derivo l'integrale dipendente da parametro

$$\varphi(r) = \int_0^r dp \int_0^{2\pi} d\theta f(p \cos \theta, p \sin \theta) p$$

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = \int_{C_r} f(x, y) ds$$

Oss. Nel caso specifico $f(x, y) \equiv 1$, otteniamo che la derivata dell'area è il perimetro.

Esempio 4 Calcolare il baricentro di una semisfera (superf.)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

Ovvio $x_G = y_G = 0$. Resta da trovare z_G . Parametrizzo S usando le sfere

$$(R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi)$$

$$(\theta, \varphi) \in \Omega := [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

Devo procurarmi M_1, M_2, M_3 con il solito Det

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -R \cos \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \cos \theta & 0 \\ -R \sin \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$M_1 = R^2 \cos^2 \varphi \cos \theta$$

$$M_2 = R^2 \cos^2 \varphi \sin \theta$$

$$M_3 = R^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = R^2 \cos \varphi$$

$$z_G := \frac{\pi R^3}{\text{Area}} = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2} \quad (\text{controllare } \dots)$$

$$\frac{d}{dr} \iiint_{B_r} f(x,y,z) dx dy dz = \int_{S_r} f(x,y,z) d\sigma$$

$\uparrow$ palla raggio r
 e centro $(0,0,0)$
 $\uparrow$
 ∂B_r

$$\Pi_3(x, y, z) = (\underbrace{x+y^2}_A, \underbrace{y+z \arctan x}_B, \underbrace{z+e^{xy} \sin x}_C)$$
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \quad \underset{\uparrow}{A} M_1 + \underset{\uparrow}{B} M_2 + \underset{\uparrow}{C} M_3$$

sostituisco x, y, z con le
sferiche

NO! Bisogna controllare che M_1, M_2, M_3 sia nel verso giusto!!!!

Sostituisco un valore a caso $\theta = 0, \varphi = 0$

→ viene il pto della sfera $(R, 0, 0)$, mi aspetto un vettore normale con x positiva

$M_1(0,0) > 0$, quindi andava Bene 😊
Solo ora lo so.

Il conto non sembra piacevolissimo 😞.

Proviamo con teo. div.: Sia B la semisfera "piena".
Allora

$$\underbrace{\iiint_B \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz}_{= 3 \operatorname{Vol}(B)} = \int_{\partial B} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$(0,0,-1)$
↑

$$= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_C \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑ ↑
quello che cerchio base
voglio

Resta da calcolare

$$\int_C -C \, d\sigma = - \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sin R x \cdot e^{xy} \, dx \, dy = 0$$

↑ ↑ ↑
terza comp. di E z vale 0 sul cerchio di base simmetria

— 0 — 0 —