

Esercizi classici su G-G e teo. divergenza:

- ① Dato un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ descritto mediante il bordo, calcolare l'area o l'integrale su Ω di una funzione data.
- ② Calcolo di integrali di flusso lungo curve (o superfici).

Esempio 1 $\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3) \quad t \in [0,1]$.

Visto a suo tempo: è una curva semplice e chiusa

Calcolare area e coordinate del baricentro di Ω .



Teo. div.
$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{E}) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} A \, dy - B \, dx$$

Cerco un campo $\vec{E}$ t.c. $\operatorname{div} \vec{E} = 1$. Una possibilità è

$$\vec{E}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 A B

Dalla formula sopra:

$$\begin{aligned} \operatorname{Area}(\Omega) &= \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{E}) \, dx \, dy \\ &= \int_{\partial\Omega^+} \underset{0}{A} \, dy - \underset{y}{B} \, dx = \int_{\gamma} -y \, dx \end{aligned}$$

Occhio all'orientazione: γ percorre $\partial\Omega$ nel verso giusto, cioè lasciandolo a sx.

$$-\int_{\gamma} y dx = -\int_0^1 \underbrace{(t-t^3)}_y \underbrace{(1-2t)}_{dx} dt$$

$$= -\int_0^1 (t-2t^2-t^3+2t^4) dt = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \dots$$

In alternativa potrei usare $\vec{E}(x,y) = (x,0)$ ottenendo

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x dy = \int_0^1 (t-t^2)(1-3t^2) dt$$

$$= \int_0^1 (t-3t^3-t^2+3t^4) dt = \dots = \text{controllare che venga uguale.}$$

Oss. Cosa hanno in comune le 2 formule?

Si ottengono l'una dall'altra integrando per parti

$$\int_0^1 \underbrace{(t-t^2)}_{\text{deriv.}} \underbrace{(1-3t^2)}_{\text{prim.}} dt = \underbrace{[\dots]_0^1}_0 - \int_0^1 (1-2t)(t-t^3) dt$$

perché γ è chiusa

Formule per l'area di una regione Ω dato il bordo

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\partial\Omega^+} x dy = - \int_{\partial\Omega^+} y dx$$

occhio al verso!

Si possono ottenere formule unendo le precedenti

$$\text{Area}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^+} (x dy - y dx) = \int_{\partial\Omega^+} \left(\frac{1}{3} x dy - \frac{2}{3} y dx \right)$$

Tornando all'esempio, per avere le coord. del baricentro servono

$$\iint_{\Omega} x dx dy$$

$$\iint_{\Omega} y dx dy$$

Facciamo il 1°. Selve $\vec{E}$ con $\text{div } \vec{E} = x$, ad esempio

$$\vec{E}(x,y) = (0, xy) \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{x^2}{2}, 0 \right)$$

$$\iint_{\Omega} x dx dy = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega^+} (A dy - B dx)$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} -xy dx = - \int_0^1 xy dx$$

$$= - \int_0^1 \underbrace{(t-t^2)}_x \underbrace{(t-t^3)}_y \underbrace{(1-2t) dt}_{dx} = \text{si fa...}$$

$$\iint_{\Omega} y dx dy = \int_{\gamma} (A dy - B dx) \quad (A,B) = (xy, 0)$$

$$= \int_{\gamma} xy dy = \int_0^1 (t-t^2)(t-t^3)(1-3t^2) dt$$

= si fa...

— o — o —

Oss. Volendo NON usare questi strumenti, avrei dovuto scrivere Ω come insieme normale, cosa in questo caso possibile

Normale asse x

$$\begin{pmatrix} t-t^2 \\ t-t^3 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$

Ricavo t in funzione di x

$$-t^2 + t = x \leadsto t^2 - t + x = 0 \leadsto t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Ora possiamo scrivere

$$\Omega := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \underbrace{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}_{\varphi(x)} \leq y \leq \underbrace{\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}}_{\psi(x)} \right\}$$

$$\text{Area}(\Omega) = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1 dy = \text{con pazienza forse si fa.}$$

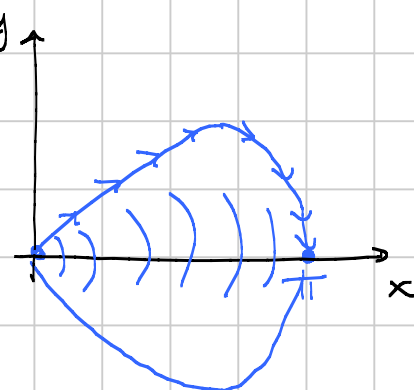
— 0 — 0 —

Esempio 2 $\gamma(t) = (t + \sin t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$

① Stabilire se la curva è chiusa e/o semplice.

$x(t)$ è strett. cresc. $\Rightarrow$ semplice, ma non chiusa

② Detta Ω la regione tra la curva e l'asse x , calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando Ω attorno all'asse x .



Oss. Esplicitare come insieme normale non è possibile con le sole funz. elementari (dovrei risolvere $x = t + \sin t$)

Per il volume potrei usare Guldino, ma dovrei calcolare l'area per poi semplificarla 😊.

In realtà basta usare la formula

$$\text{Vol} = 2\pi \iint_{\Omega} y \, dx \, dy = 2\pi \int_{\partial\Omega^+} (A \, dy - B \, dx) \quad (A, B) = (xy, 0)$$

$$= 2\pi \int_{\partial\Omega^+} xy \, dy$$

Ora $\partial\Omega^+$ è fatto da 2 curve

- $\partial_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi] \rightsquigarrow$ pezzo di asse x
- $\gamma(t)$ al contrario



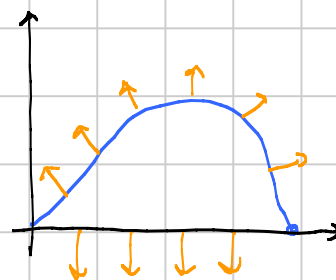
$$\int_{\partial\Omega^+} xy \, dy = \underbrace{\int_{\partial_1} xy \, dy}_0 - \int_{\gamma} xy \, dy = - \int_0^{\pi} \underbrace{(t + \sin t)}_x \underbrace{\sin t}_y \underbrace{\cos t \, dt}_{dy}$$

(sono 0 sia y sia dy) = si fa...

③ Calcolare il flusso attraverso γ "verso l'alto" del campo vettoriale

$$\vec{E} = (x + y \arctan(e^{y^2}), \log(1+x^2) + y)$$

Idea 1: Calcolo il vettore normale esterno prendendo il tangente alla curva ruotato di 90° in senso antiorario



$$\gamma(t) = (1 + \cos t, \cos t) \rightsquigarrow (-\cos t, 1 + \cos t)$$

Ora basta calcolare

$$\int_0^\pi [A(t + s i t, s i t) (-\cos t) + B(t + s i t, s i t) (1 + \cos t)] dt$$

dove $\vec{E} = (A, B)$ = simpatico conto 😊

Idea 2: usare teo. div.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy &= \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \\ &= \int_{\substack{\uparrow \\ \text{supp } \gamma_1}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds + \underbrace{\int_{\text{supp } \gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds}_{\substack{\text{quello che voglio} \\ (\text{e' } \vec{n} \text{ che voglio e' } \\ \text{quello esterno a } \Omega)}} \end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \iint_{\Omega} 2 \, dx \, dy = 2 \operatorname{Area}(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } \gamma_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds &= \int_0^\pi -B \, ds \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ (0, -1) \end{array} \quad \nearrow \gamma_1(t) = (0, t) \rightsquigarrow ds = dt \\ &= \int_0^\pi -\log(1+t^2) \, dt = \text{tranquillo per parti.} \end{aligned}$$

— 0 — 0 —