

Teo. div. (caso abbastanza generale)

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Ipotesi su Ω :

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è compatto e per ogni $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ esiste un rettangolo R centrato in (x_0, y_0) tale che $\Omega \cap R$ è un insieme normale alto/basso oppure dx/sx e la funzione che descrive l'insieme normale è di classe C^1 .

Ipotesi su $\vec{E}$:

- esiste un aperto $\Omega' \supseteq \Omega$ in cui le componenti di $\vec{E}$ sono di classe C^1 .

— o — o —

La dimostrazione sfrutta le **PARTIZIONI DELL'UNITÀ** che è una tecnica che permette il passaggio

cose valide localmente $\rightsquigarrow$ cose valide globalmente

Dim.

Passo 1: costruzione di un ricoprimento

Ad ogni pto $(x, y) \in \Omega$ associo un rettangolo $R_{(x,y)}$ che ha centro in (x, y) e costruito così:

$\rightarrow$ se $(x, y) \in \operatorname{Int}(\Omega)$, faccio in modo che

$$\operatorname{Clos}(R_{(x,y)}) \subseteq \operatorname{Int}(\Omega)$$

→ se $(x,y) \in \partial\Omega$, scelgo $R_{(x,y)}$ in modo che $\Omega \cap R_{(x,y)}$ sia normale come nelle ipotesi messe all'inizio.

Passo 2: sottoricoprimento finito Per costruzione

$$\Omega \subseteq \bigcup_{(x,y) \in \Omega} \text{Int}(R_{(x,y)})$$

Essendo Ω compatto, basta sottoricopr. finito

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(R_i)$$

Passo 3: partizione dell'unità Per Analisi 1, per ogni

$i = 1, \dots, n$ esiste

$$\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

di classe C^∞ tale che

$$\varphi_i(x,y) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad (x,y) \in \text{Int}(R_i)$$

↑
e anzi > 0

(quindi φ_i è positiva dentro e nulla fuori)

Sia $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$

basta prendere



$$\varphi_i(x,y) = f_i(x) g_i(y)$$

↑
 > 0 solo
su (a_i, b_i)

↑
 > 0 solo su
 (c_i, d_i)

Può

$$\psi_i(x,y) := \frac{\varphi_i(x,y)}{\sum_{i=1}^n \varphi_i(x,y)}$$

Dico che il denominatore è > 0 per ogni $(x, y) \in \Omega$, anzi per ogni

$$(x, y) \in \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(R_i)$$

quindi le ψ_i sono ben definite in un intorno aperto di Ω .

Inoltre

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Infine, ogni $\psi_i(x, y)$ è di classe C^∞ , positiva su $\text{Int}(R_i)$ e nulla altrove.

Questa è una partizione dell'unità subordinata alla scelta degli insiemi R_i .

Passo 4: gran finale

$$\iint_{\Omega} \text{div} \vec{E} = \iint_{\Omega} \text{div} \left[\left(\sum_{i=1}^n \psi_i \right) \vec{E} \right] = \iint_{\Omega} \text{div} \left[\sum_{i=1}^n (\psi_i \vec{E}) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega} \text{div} (\psi_i \vec{E}) \, dx \, dy$$

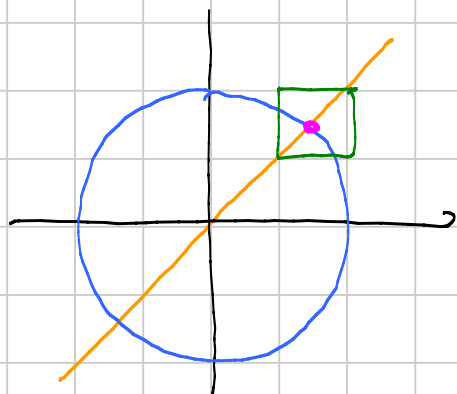
↑
campo nullo fuori da R_i , e R_i ricade nei due casi speciali del finale della lezione precedente

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\partial \Omega^+} \langle \psi_i \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$$= \int_{\partial \Omega} \left\langle \sum_{i=1}^n \psi_i \vec{E}, \vec{n} \right\rangle \, ds = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds.$$

— o — o —

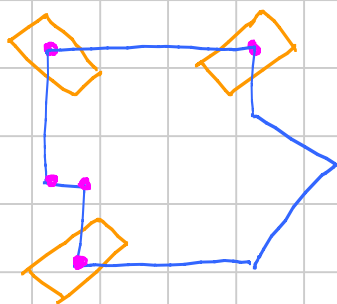
Oss. Alcuni testi fanno una dim. di questo tipo usando solo i quadrati. Non funziona nemmeno nel caso del cerchio perché non si può garantire un quadrato in cui vale la rappr. alto/basso o dx/sx



In ogni quadrato centrato nel punto segnato non vale la rappresentazione desiderata come insieme normale.

Oss. La dimostrazione fatta copre tutti i casi in cui $\partial\Omega$ è liscio a sufficienza.

Non copre certi casi in cui il bordo ha degli "angoli" perché non è garantita la rappr. alto/basso o dx/sx.



Per uscire occorre un enunciato locale che ammetta rettangoli ruotati, cioè

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

quando $\vec{E} \equiv 0$ fuori da R (rettangolo ruotato).

Questo è un esercizio che si può fare

- mediante cambio di variabili
 - mediante decomposizione in insiemi normali.
- (Basta dividere in 3 pezzi).

— o — o —

Gauss - Green e teo. della divergenza valgono in ogni dimensione, ma si perde l'interpretazione con le forme differenziali.

In $\mathbb{R}^3$ l'enunciato diventa

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz}_{\text{integrale triplo}} = \int_{\substack{\partial\Omega \\ \uparrow \text{superficie}}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \underbrace{d\sigma}_{\substack{\uparrow \text{integrale} \\ \text{superficiale}}}$$

normale esterna a $\partial\Omega$

Il RHS è un integrale di flusso attraverso una superficie orientata.

Come si calcolerebbe...

→ scrivo una parametrizzazione della sup.

$$\Phi: \Omega' \rightarrow \partial\Omega \quad (\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2)$$

→ calcolo il vettore normale alla sup con la formula

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = (M_1, M_2, M_3)$$

→ aggiusto il verso (mettendo segno - se serve) in modo che punti all'esterno

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{a quel p.to} \quad \vec{n} &= \frac{\pm 1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} (M_1, M_2, M_3) \\ &= (m_1, m_2, m_3) \end{aligned}$$

→ Finalmente

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \pm \underbrace{\iint_{\Omega'} (Am_1 + Bm_2 + Cm_3) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv}_{\text{integr. sup.}}$$

Conclusione

scelto in modo che sia la normale esterna.

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \pm \iint_{\Omega'} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

$\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ est è
dove variano u e v

La dim. in dim 3 è analoga a quella in dim 2, fatta a partire dagli insiemi normali.

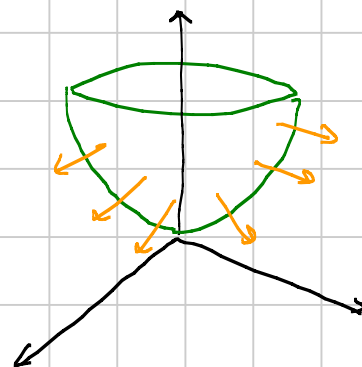
Esempio $z = x^2 + y^2$

$$(u, v, u^2 + v^2)$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

↑
questa punta
verso l'alto



Quindi se voglio il flusso verso il basso

$$(M_1, M_2, M_3) = (2u, 2v, -1)$$

— 0 — 0 —