

Teo. della divergenza e Gauss-Green in dim. 2

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} A \, dy - B \, dx = \int_{\partial\Omega^+} (-B \, dx + A \, dy)$$

$$\int_{\partial\Omega^+} (C \, dx + D \, dy) = \iint_{\Omega} (D_x - C_y) \, dx \, dy$$

$$\iint_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy$$

Oss. L'ultima formula (teo. di Gauss-Green) è la formula di integrazione per parti in $\mathbb{R}^2$.

Equivalenza fra teo. div. e G.G.

G.G. $\Rightarrow$ teo. div. Prendiamo $f \equiv 1$.

teo. div. $\Rightarrow$ G.G. Calcoliamo $\operatorname{div}(f\vec{E})$

$$\operatorname{div}(f\vec{E}) = \operatorname{div}(fA, fB) = (fA)_x + (fB)_y$$

$$= f_x A + f A_x + f_y B + f B_y$$

$$= \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$$

Oss. In ogni numero di variabili vale la formula

$$\operatorname{div} (f \vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$$

Applichiamo il teo. della div. al campo $f \vec{E}$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} (f \vec{E}) \, dx \, dy = \int_{\partial \Omega} \langle f \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$



$$\int_{\partial \Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$$\iint_{\Omega} (f \operatorname{div} \vec{E} + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle) \, dx \, dy$$

Riorganizzando i termini otteniamo G.G.

Basta dim. il teorema della divergenza.

Caso speciale degli insiemi normali Supponiamo Ω insieme normale risp. all'asse x , cioè

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Supponiamo φ e ψ di classe C^1 (ma C^1 a tratti va bene uguale).

Supponiamo che $\vec{E}$ sia di classe C^1 in un aperto $\Omega' \supseteq \Omega$.

Allora vale la formula

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Dim. Devo dim. che

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} A dy - B dx$$

Dimostro che vale

$$\iint_{\Omega} By dx dy = \int_{\partial\Omega^+} -B dx$$

$$\iint_{\Omega} Ax dx dy = \int_{\partial\Omega^+} A dy$$

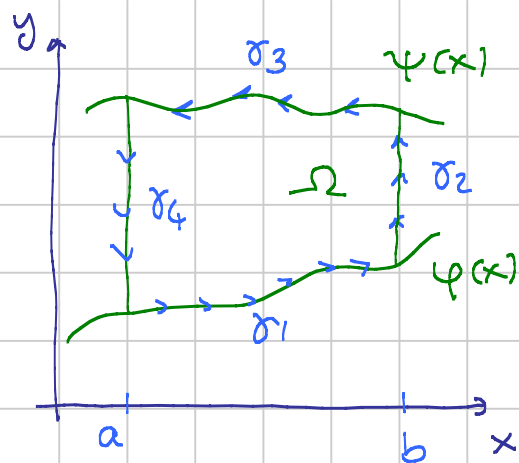
$\partial\Omega$ è fatto da 4 curve

$$\partial_1(t) := (t, \varphi(t)) \quad t \in [a, b] \quad \partial_2(t) := (b, t) \quad t \in [\varphi(b), \psi(b)]$$

$$\partial_3(t) := (t, \psi(t)) \quad t \in [a, b] \quad \partial_4(t) := (a, t) \quad t \in [\varphi(a), \psi(a)]$$

$$\int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\partial_1} + \int_{\partial_2} - \int_{\partial_3} - \int_{\partial_4}$$

sistemano le orientazioni.



Dim. B

$$\iint_{\Omega} B_y(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy B_y(x, y)$$

$$= \int_a^b dx [B(x, y)]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} = \underbrace{\int_a^b B(x, \psi(x)) dx}_1 - \underbrace{\int_a^b B(x, \varphi(x)) dx}_3$$

Calcolo $\int_{\partial\Omega^+} B dx$

$$\int_{\sigma_1} B dx = \underbrace{\int_a^b B(t, \varphi(t)) \pm dt}_1$$

$$-\int_{\sigma_3} B dx = -\underbrace{\int_a^b B(t, \varphi(t)) dt}_3$$

$$\int_{\sigma_2} B dx = \int_{\sigma_4} B dx = 0 \quad \text{per colpa di } \dot{x}(t) \equiv 0.$$

— 0 — 0 —

Dim. A Idea: considerare la funzione

$$G(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x, y) dy$$

Per analisi $\pm$ vale

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x) dx$$

Calcolo $G'(x)$ con gli int. dip. da parametro

$$G'(x) = A(x, \psi(x)) \dot{\psi}(x) - A(x, \varphi(x)) \dot{\varphi}(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy$$

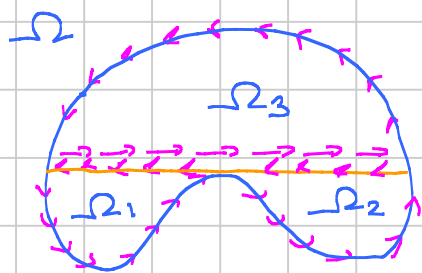
Vado a sostituire

$$\begin{aligned} \int_a^b G'(x) dx &= \int_a^b A(x, \psi(x)) \dot{\psi}(x) dx && \int_{\sigma_1} A dy \\ &- \int_a^b A(x, \varphi(x)) \dot{\varphi}(x) dx && - \int_{\sigma_3} A dy \\ &+ \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy && \int_{-2}^2 A_x(x, y) dx dy \\ &= G(b) - G(a) && \int_{\sigma_2} A dy - \int_{\sigma_4} A dy \end{aligned}$$

Riorganizzando i pezzi si ha la tesi.

— 0 — 0 —

Conclusione brutale Ogni Ω si spezza come unione di insiemi normali e osservo le cancellazioni.



In Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 vale il teorema.
Osservo che i bordi creati artificialmente vengono percorsi nei 2 versi opposti e quindi si cancellano.

— o — o —

Casi preparatori ad una dim. più rigorosa

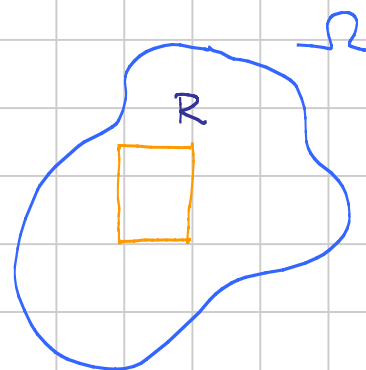
Caso 1 Il supporto di $\vec{E}$ è contenuto in un rettangolo R con

$$\text{clos}(R) \subseteq \text{Int}(\Omega)$$

Dim. Le componenti di $\vec{E}$ sono nulle fuori di R .

$$\iint_{\Omega} \text{div}(\vec{E}) dx dy = \iint_R \text{div}(\vec{E}) dx dy$$

↑
fuori
vale 0



$$= \int_{\partial R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = 0 = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

↑
 $\vec{E} \equiv 0$
su ∂R

↑
 $\vec{E} \equiv 0$
su $\partial \Omega$.

R è normale, quindi vale il teo.

Caso 2 Il supporto di $\vec{E}$ è contenuto in un rettangolo R tale che

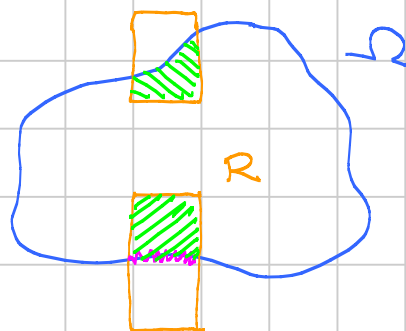
$$\Omega \cap R$$

è un insieme normale (sopra/sotto o dx/sx)

Dim.

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \iint_{\Omega \cap R} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy$$

$\uparrow$
 $\vec{E} \equiv 0$ fuori
 di R



$$= \int_{\partial(\Omega \cap R)} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial \Omega \cap R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$\uparrow$
 $\partial(\Omega \cap R)$
 $\Omega \cap R$ è
 normale

$\uparrow$
 l'unico dei 4
 pezzi di $\partial(\Omega \cap R)$
 su cui $\vec{E} \neq 0$

$$= \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$\uparrow$
 $\partial \Omega$
 sul resto di $\partial \Omega$
 $\vec{E} \equiv 0$.

— 0 — 0 —