

TEOREMA DI GAUSS-GREEN**TEOREMA DELLA DIVERGENZA**

Setting : caso in dimensione 2.

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{funzione}$$

$$\vec{E}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{campo di vettori}$$

$$\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$

Teorema (Gauss - Green) Sotto opportune ipotesi vale

$$\iint_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy$$

normale esterna
a Ω

Teorema della divergenza Sotto opportune ipotesi vale

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

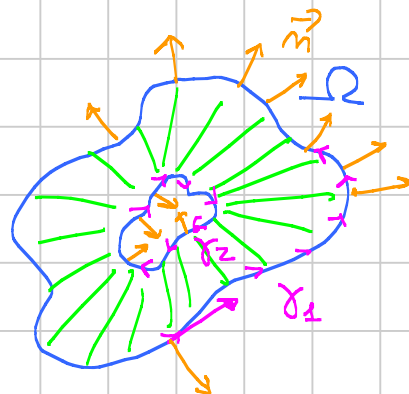
Commenti sulle tesi

- In G-G il primo e ultimo integrale sono integrali doppi su Ω . Sono integrali di funzione.
- Il primo integrale al RHS è l'integrale di una funzione

su "una" curva. Si intende che $\partial\Omega$ è l'unione dei supporti di un numero finito di curve semplici

- Con $\vec{n}$ si indica il VETTORE normale esterno al bordo di Ω .

Come calcolo $\vec{n}$?



- Scrivo una parametrizzazione dei vari pezzi di $\partial\Omega$.
- Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ è la param. di un pezzo, ed il verso di percorrenza è tale che Ω si trova a sx dell'unico che percorre la curva, allora il vettore tangente alla curva è

$$\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \text{tangente}$$

- $\vec{n}$ si trova facendo una rotazione di 90° in verso orario. Quindi

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

Vale se la curva è nel verso giusto

Oss. Più formalmente, posso dire che (normale, tangente) è una base di $\mathbb{R}^2$ ortogonale e orientata come la base canonica.

Gli integrali curvilinei al RHS dei due teoremi si possono riscrivere come integrali di forme diff., in particolare

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} (-Bdx + A dy)$$

↑
curva o sistema di
curve che percorre $\partial\Omega$
lasciando Ω a sinistra

Dim Usando $\vec{n}$ come calcolato sopra otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \int_a^b \left[A(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right. \\ &\quad \left. - B(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right] \underbrace{\frac{ds}{dt} dt}_{ds} \\ &= \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - B(x(t), y(t)) \dot{x}(t)] dt \\ &= \int_{\gamma} -Bdx + A dy. \end{aligned}$$

— o — o —

Riscrittura 1 del teorema della divergenza

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega^+} -Bdx + A dy$$

↑
sistema di curve
che percorre $\partial\Omega$ con verso giusto.

Riscrittura 2 del teorema della divergenza

$$\int_{\partial\Omega^+} A dx + B dy = \iint_{\Omega} (-A_y + B_x) dx dy$$

Dim Si tratta di applicare la riscrittura 1 al campo

$$\vec{E} = (B, -A)$$

— 0 — 0 —

Due casi speciali di G-G

$$\iint_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle dx dy$$

• Caso 1: $f = u$, $\vec{E} = \nabla v$ con u e v funzioni

$$\iint_{\Omega} u \Delta v = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx dy$$

↑
 $\operatorname{div}(\nabla v)$

↑
 $\langle \nabla v, \vec{n} \rangle$
= derivata direzionale

• Caso 2: $f = u$, $\vec{E} =$ vettore $\vec{v}$ costante

$$0 = \int_{\partial\Omega} u \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla u, \vec{v} \rangle dx dy$$

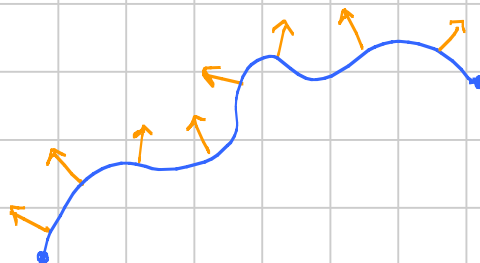
$$= - \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} dx dy$$

Altra interpretazione del RHS del teorema della divergenza

INTEGRALI DI FLUSSO Caso 2 dimensionale

Sia data una curva orientata, cioè una curva semplice su cui ho assegnato in modo continuo un vettore normale.

Sia dato un campo $\vec{E}$, definito almeno sul supporto della curva



$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds =: \text{flusso di } \vec{E} \text{ attraverso } \gamma$$

orientata

Rilettura teo. divergenza

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

L'integrale della divergenza di $\vec{E}$ all'interno di Ω è uguale al flusso di $\vec{E}$ uscente da Ω .

Interpretazione ciclistica Se faccio un giro in bici lungo una curva semplice e il vento lo sento sempre da destra, di sicuro il campo velocità del vento ha $\operatorname{div} \neq 0$, quindi non è un rotore.