

Area di una sup.

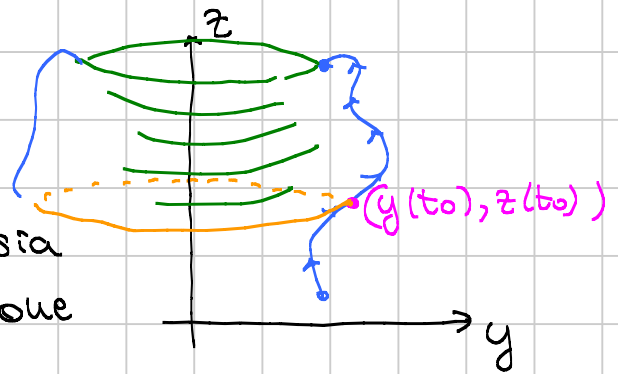
$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv = \iint_{\Omega} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{\text{Det}[(J\Phi)^t J\Phi]} \, du \, dv \end{aligned}$$

Matrice
2x2

$J\Phi = \text{matrice } 3 \times 2$

SUPERFICI DI ROTAZIONE

Da una curva γ nel piano yz , sia S la superficie data dalla rotazione completa intorno all'asse z del sostegno di γ (che pensiamo semplice)



Parametrizzazione della sup.

La curva sia $\gamma(t) := (y(t), z(t)) \quad t \in [a, b]$

La sup. diventa

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$

raggio

$$(t, \theta) \in \underbrace{[a, b] \times [0, 2\pi]}_{\Omega}$$

Calcolo dell'area

$$\begin{pmatrix} X_t & Y_t & Z_t \\ X_\theta & Y_\theta & Z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cos \theta & \dot{y}(t) \sin \theta & \dot{z}(t) \\ -y(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = -\dot{z}(t) y(t) \cos \theta$$

$$M_2 = -\dot{z}(t) y(t) \sin \theta \quad (\text{det con segno cambiato})$$

$$M_3 = y(t) \ddot{y}(t)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} &= \sqrt{\dot{z}(t)^2 y(t)^2 + \ddot{y}(t)^2 y(t)^2} \\ &= y(t) \sqrt{\ddot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \end{aligned}$$

↑
sto pensando $y(t) \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \int_0^{2\pi} \int_a^b y(t) \sqrt{\ddot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt d\theta \\ &= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\ddot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \end{aligned}$$

Teorema (Guldinus 2) L'area di una sup. di rotazione è data da

$$\text{Area} = \text{lunghezza}(\gamma) \cdot \underbrace{2\pi y_G}_{\substack{\text{lunghezza della circ. descritta dal} \\ \text{baricentro della curva durante} \\ \text{la rotazione}}}$$

Dim Dalla formula di sopra

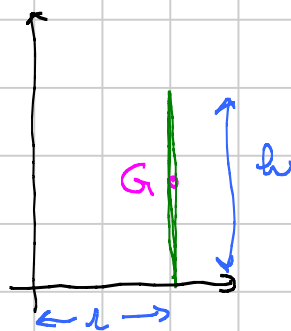
$$\text{Area} = \text{lunghezza}(\gamma) \cdot 2\pi \frac{\int_a^b y(t) \sqrt{\ddot{y}^2 + \dot{z}^2} dt}{\text{lunghezza}(\gamma)} =$$

$$= \text{length}(\gamma) \cdot 2\pi \frac{\int_{\gamma} y \, ds}{\text{length}(\gamma)} = \text{length}(\gamma) \cdot 2\pi y_G$$

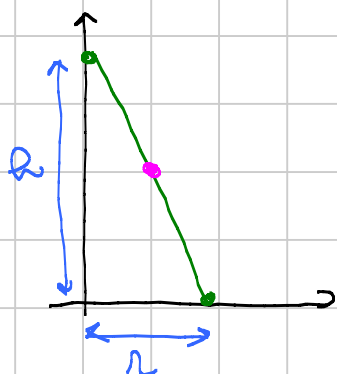
— o — o —

Esempio 1 Cilindro

$$\text{Sup laterale} = R \cdot 2\pi R$$



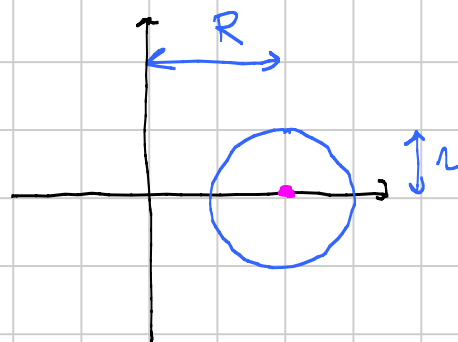
Esempio 2 Cono



$$\begin{aligned} \text{Sup. laterale} &= \sqrt{R^2 + h^2} \cdot 2\pi \frac{h}{2} \\ &= \pi h \sqrt{R^2 + h^2} \end{aligned}$$

Esempio 3 Toro

$$\text{Sup. laterale} = 2\pi R \cdot 2\pi R = 4\pi^2 R^2$$



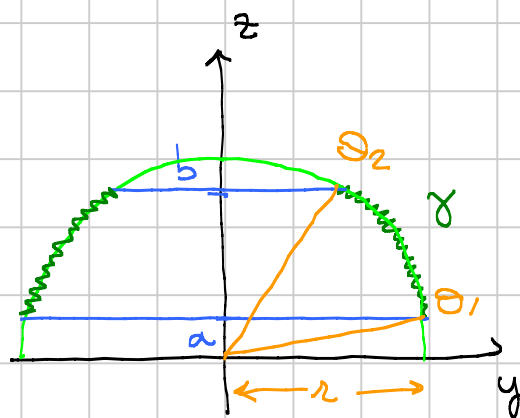
Esempio 4 Segmento sferico

Uso la formula generale

$$\text{Area} = 2\pi \int_{\gamma} y \, ds$$

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underset{\uparrow}{r \cos t} \cdot \underset{\uparrow}{r} \, dt = 2\pi r^2 [\sin \theta_2 - \sin \theta_1] \\ &= 2\pi r (b - a) \quad (\text{caso part.: } b = r, a = -r) \end{aligned}$$



Integrali superficiali

1 Notazioni

superficie
su cui integro

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$



$$f(x, y, z) d\sigma$$

$d\sigma$ indica che si tratta
di un integrale superficiale

funzione che si integra
(definita almeno sul supporto)

2-3 Definizione e significato geometrico

Faccio somme alla Riemann o Darboux dividendo Ω
in rettangolini R_i e sommando

$$\text{Area}(\Phi(R_i)) \cdot \sup_{\text{inf}} \{ f \text{ in } \Phi(R_i) \} \quad \text{alla Darboux}$$

$$\cdot f(\Phi(u_i, v_i)) \quad \text{alla Riemann}$$

$\uparrow$
p.to scelto
in R_i

4 Come si calcolano

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \cdot \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} du dv$$

Comportamento per riparametrizzazione (vale sia per l'area, sia per l'integrale superficiale)

Sia $\Phi_1: \underbrace{\Omega_1}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie (tutto regolare)

Sia $\psi: \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ di classe C^1 invertibile con inversa di classe C^1 .

Considero la nuova sup. $\Phi_2: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\Phi_2(u, v) := \Phi_1(\psi(u, v))$$

Prop. Le due superfici Φ_1 e Φ_2 hanno la stessa area

Dim. Calcolo le matrici jacobiane

$$J\Phi_2(u, v) = J\Phi_1(\psi(u, v)) J\psi(u, v) \quad (\text{check dimensioni})$$

$$(J\Phi_2)^t \cdot (J\Phi_2) = (J\psi)^t (J\Phi_1)^t (J\Phi_1) J\psi$$

$$\text{Det} [\dots] = |\text{Det } J\psi|^2 \cdot \text{Det} [(J\Phi_1(\psi(u, v)))^t J\Phi_1(\psi(u, v))]$$

$$\text{Area}(\Phi_2) = \iint_{\Omega_2} \sqrt{\text{Det } J\Phi_2^t J\Phi_2}$$

$$= \iint_{\Omega_2} |\text{Det } J\psi| \cdot \sqrt{\text{Det} [(J\Phi_1 \circ \psi)^t (J\Phi_1 \circ \psi)]}$$

$$= \iint_{\Omega_1} \sqrt{\text{Det} (J\Phi_1^t J\Phi_1)} = \text{Area}(\Phi_1)$$