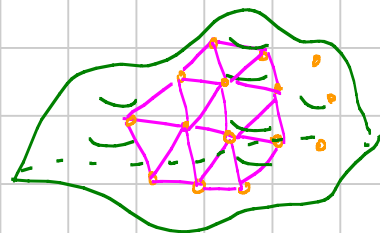


AREA DI UNA SUPERFICIE

Come NON si definisce

L'analogia con le curve porterebbe a "triangolare" una superficie, calcolare la somma delle aree dei triangoli, e fare il sup al variare della triangolazione



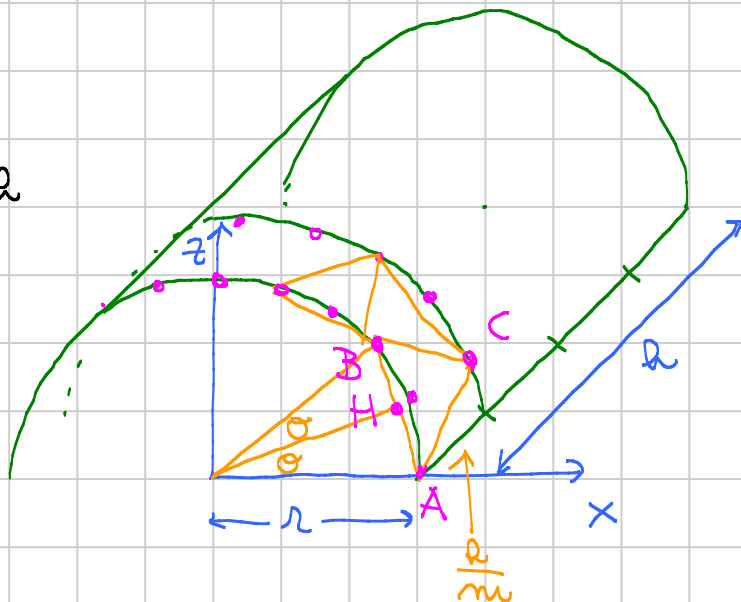
☹ Il sup viene quasi sempre $+\infty$

ESEMPIO DI SCHWARZ

Cilindro di raggio r ed altezza h

Divido l'altezza in m parti

Divido la semicirc. in $2m$ parti



Calcoliamo l'area del singolo triangolino, dopo aver posto

$$\theta := \frac{\pi}{2m}$$

$$\text{Base } AB = 2r \sin \theta$$

$$A = (r, 0, 0) \quad B = (r \cos(2\theta), 0, r \sin(2\theta))$$

$$C = (r \cos \theta, \frac{h}{m}, r \sin \theta)$$

$$H = \left(r \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, 0, r \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) = (r \cos^2 \theta, 0, r \sin \theta \cos \theta)$$

$$\text{Altezza } CH = \left[R^2 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2} + R^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \theta)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{R^2}{m^2} + R^2 (1 - \cos \theta)^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{Area singolo triangolo} = \frac{1}{2} \cancel{2R} \sin \theta \left[\dots \right]^{1/2}$$

Quanti sono i triangoli, se considero l'intero cilindro?

Sono $4nm$ (ci sono n strisce, ciascuna con $4m$ Δ , $2m$ con la base da una parte e $2m$ dall'altra).

$$\text{Area totale} = 4nm R \sin \theta \left[\dots \right]^{1/2}$$

$$= 4nm R \sin \frac{\pi}{2n} \left[\frac{R^2}{m^2} + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Devo fare il sup al variare di m ed n

• Pongo $n = k$, $m = k$ e faccio tendere $k \rightarrow +\infty$

$$\sim 4k^2 R \sin \frac{\pi}{2k} \left[\frac{R^2}{k^2} + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2k} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\cancel{4Rk^2} \sim \frac{\pi}{2k} \left[\frac{R^2}{\cancel{k^2}} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]^{1/2} \rightarrow 2\pi R \quad \text{☺}$$

Funzione analoga se prendo $n = k$, $m = k^a$ con $a < 2$
(verifica per esercizio)

• Pongo $n = k$, $m = k^3$ e faccio tendere $k \rightarrow +\infty$

$$4\pi k k^3 \sin\left(\frac{\pi}{2k}\right) \left[\frac{a^2}{k^6} + r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2k}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$4\pi k \cdot k^3 \sim \frac{\pi}{2k} \quad \underbrace{\left[\frac{a^2}{k^6} + r^2 \left(\frac{\pi^2}{4k^2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{1/2}}_{\sim \frac{1}{k^2}} \rightarrow +\infty$$

Interpretazione geometrica : EFFETTO FISARMONICA

Quando n è molto più grande, i triangoli tendono ad uscire dalla superficie, come nella fisarmonica chiusa. Quindi i triangoli non approssimano più la superficie.

Con le curve non succedeva: le poligonal tendevano ad approssimare le rette tangenti alla curva.

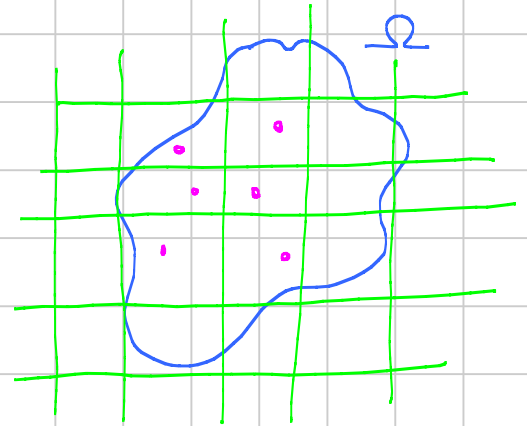
— o — o —

Come si definisce l'area nel caso di superfici regolari

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{di classe } C^1$$

• Suddivido Ω in rettangoli R_i

• In ogni rettangolo R_i scelgo un pto (u_i, v_i) (taggo i rettangoli)



• Invece di considerare l'immagine di R_i mediante Φ (che sarebbe un pezzo di sup), considero l'imm. di R_i mediante il differenziale di Φ in (u_i, v_i) .

Questo è un pezzo del piano tangente nel p.to della sup. con. a (u_i, v_i) . Questo pezzo è un parallelogrammo.

Brutalmente: sto approx. la sup. con piastrelle a forma di parallelogrammi sistemate tangenti.

- Somma le aree dei parallelogrammi
- Faccio il limite "alla Riemann", cioè dico che l'area è S se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall$ rettangolazione con rettangoli di diametro $\leq \delta$
 $\forall$ tagging dei rettangoli

$$| \sum \text{area parallelogrammi} - S | \leq \varepsilon.$$

Come si calcola? Tutto dipende dall'area del parallelogrammo.

Per le formule di algebra lineare della les. prec.

$$\text{Area parallelogrammo } i = \text{Area}(R_i) \cdot \| \Phi_u(u_i, v_i) \wedge \Phi_v(u_i, v_i) \|$$

Sommando sui i e facendo il limite viene

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \| \Phi_u \wedge \Phi_v \| \, du \, dv$$

$$= \iint_{\Sigma} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv$$

$$= \iint_{\Sigma} \sqrt{\text{Det}((J\Phi)^t (J\Phi))} \, du \, dv$$

Caso cartesiano

$(u, v, \varphi(u, v))$

$$J\phi = \begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi_u & \varphi_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (J\phi)^t (J\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi_u \\ 0 & 1 & \varphi_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi_u & \varphi_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \varphi_u^2 & \varphi_u \varphi_v \\ \varphi_u \varphi_v & 1 + \varphi_v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Det} = 1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2 + \varphi_u^2 \varphi_v^2 - \varphi_u^2 \varphi_v^2$$

$$= (1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)$$

$$\text{Area}(\text{sup}) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2} \, du \, dv$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \varphi_3^2 & \varphi_2^2 & \varphi_1^2 \end{matrix}$