

SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

Def. (Superficie) Una superficie è una funzione

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}^d)$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme non vuoto.

Def. (Supporto) Il supporto di una superficie è l'immagine cioè

$$\Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Notazione Indicheremo con (u, v) le coordinate in Ω e con X, Y, Z le componenti di Φ , quindi

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

Ipotesi classiche Di solito si assume che

- Ω sia connesso, compatto, chiusura di un aperto con $\partial\Omega$ abbastanza regolare (ad esempio $\Omega =$ rettangolo, oppure $\Omega =$ disco)
- Φ con componenti di classe C^1 e magari iniettiva nella parte interna di Ω , con Φ_u e Φ_v lin. indep.

— o — o —

Esempio 1 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

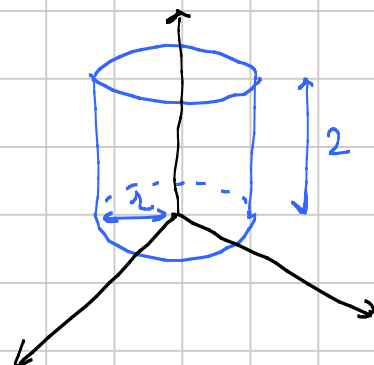
Allora il grafico di f è una superficie con parametrizz.

$$(u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

Superficie CARTESIANA: grafico di una funzione

Esempio 2 Cilindro con asse lungo axe z

$$(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad \begin{aligned} \theta &\in [0, 2\pi] \\ z &\in [0, 2] \end{aligned}$$



r è un parametro fisso

$$(r \cos u, r \sin u, v) \quad (u, v) \in \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2]$$

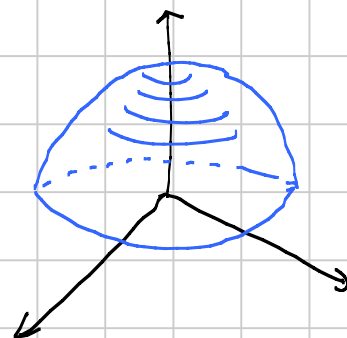
↑
sviluppo piano del
cilindro.

Esempio 3 (Semisfera con centro nell'origine,
raggio 3 e $z \geq 0$)

In coord. sferiche si parametrizza
come

$$(3 \cos \varphi \cos \theta, 3 \cos \varphi \sin \theta, 3 \sin \varphi)$$

$$(\theta, \varphi) \in \Omega = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$



Esercizio Parametrizzare la superficie (hint: ha 2 comp. conn.)

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + yz = 15, \quad y^2 + z^2 \leq 18\}$$

PIANO TANGENTE E VETTORE NORMALE

Consideriamo una sup.

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

Consideriamo un pto $(u_0, v_0) \in \Omega$.

Def. Il piano tangente alla sup. nel punto $\Phi(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ è quello di equazione parametrica

$$(t, s) \rightarrow \Phi(u_0, v_0) + t \Phi_u(u_0, v_0) + s \Phi_v(u_0, v_0)$$

Caso speciale della sup. cartesiana

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$$\Phi_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v))$$

$$\Phi_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v))$$

$$(t, s) \rightarrow (u_0, v_0, f(u_0, v_0)) + t(1, 0, f_u(u_0, v_0)) + s(0, 1, f_v(u_0, v_0))$$

Passando alla forma cartesiana si ottiene (verificare!)
il solito piano

$$z = f(u_0, v_0) + f_u(u_0, v_0)(x - u_0) + f_v(u_0, v_0)(y - v_0).$$

— o — o —

Esercizio Sia data una superficie, ed una curva a valori nella superficie.

Allora la retta tangente alla curva in un pto è contenuta nel piano tangente alla superficie.

La sup sia $(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ con $(u,v) \in \Omega$

Sia $(u(t), v(t))$ con $t \in [a,b]$ una funzione a valori in Ω

Considero la curva

$$\gamma(t) := (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))$$

definita per $t \in [a,b]$. Questa ha valori nella sup.

Prendo $t_0 \in (a,b)$ e calcolo la retta tangente, ponendo $u(t_0) = u_0$ e $v(t_0) = v_0$.

$$t \rightarrow \gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0) \quad (\text{eq. param. retta tang.})$$

$$\gamma(t_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0), Z(u_0, v_0))$$

$$\dot{\gamma}(t_0) = (X_u(u_0, v_0) \dot{u}(t_0) + X_v(u_0, v_0) \dot{v}(t_0), \dots, \dots)$$

Quindi

$$\gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0) = \underbrace{\Phi(u_0, v_0) + t \dot{u}(t_0) \Phi_u(u_0, v_0) + t \dot{v}(t_0) \Phi_v(u_0, v_0)}_{\text{comb. lin. di } \Phi_u \text{ e } \Phi_v}$$

Oss. L'eq. del piano tangente è il Taylor di ordine 1 della $\Phi(u,v)$. Quando Φ_u e Φ_v sono lin. indep., il piano tangente è un vero piano affine.

Parentesi di algebra lineare

Dati due vettori v_1 e v_2 in $\mathbb{R}^3$, come trovo un vettore v_3 ortogonale ad entrambi?

Con la formula misteriosa ottenuta sviluppando formalmente il determinante

$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(b_1 c_2 - c_1 b_2, -a_1 c_2 + c_1 a_2, a_1 b_2 - b_1 a_2)}$$

↑
vettore canonico ortogonale a v_1 e v_2

Notazione Nel seguito indichiamo le componenti (M_1, M_2, M_3)

Perché è ortogonale? Se al posto di (i, j, k) metto (a_1, b_1, c_1) il determinante viene $= 0$ (2 righe uguali).

Se sviluppo rispetto alla prima riga

$$a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 = 0$$

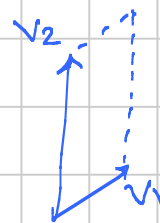
Stessa cosa se metto (a_2, b_2, c_2) .

Prop. Il vettore v_3 ottenuto dalla formula misteriosa è tale che (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbb{R}^3$ (se v_1 e v_2 erano lin. indep.) con la stessa orientazione della base canonica. (cioè il det. della matrice di cambio di base è positivo).

Oss. $(M_1, M_2, M_3) = \underbrace{v_1 \wedge v_2}_{\text{prodotto vettore}}$

Con qualche calcolo si vede che

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \| (M_1, M_2, M_3) \|$$
$$= \| v_1 \wedge v_2 \|$$



= area parallelogramma
generato da v_1 e v_2

aggiunto dopo video:
qui servono delle
radici

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

Trasposta

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \|v_2\|^2 \end{pmatrix}$$

Nel futuro useremo tutto questo con $v_1 = \Phi_u$
 $v_2 = \Phi_v$.

— o — o —