

Come calcolo l'integrale di una forma diff. lungo una curva?

Quattro strategie:

- 1 - Uso la formula
- 2 - Uso la formula dopo aver riparametrizzato la curva
- 3 - Spero che la forma sia esatta, calcolo una primitiva e faccio la diff. tra i valori negli estremi.
- 4 - Spero che la forma sia chiusa (se esatta è ancora meglio) e sostituisco la curva con una omotopia (con omotopia che lascia gli estremi fissi).

Esempio 1  $\omega = x dx + x^3 dy$

$$\gamma(t) = (\arctan t + t^{20}, \arctan t + t^{20}) \quad t \in [0, 1]$$

La curva  $\gamma(t)$  è semplice (componenti monotone) e percorre il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(\frac{\pi}{4} + 1, \frac{\pi}{4} + 1)$

La forma non è chiusa  $A_y \neq B_x$ .



Uso strategia 2 e riparametrizzo il segm. come

$$\gamma_1(t) = (t, t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{4} + 1] \quad (\text{riparam. stesso verso})$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{4} + 1} (t + t^3) dt = \text{si fa.}$$

— o — o —

Esempio 2  $\omega = x^3 y^6 dx + (\alpha x^4 y^5 + e^y) dy$

Determinare per quali  $\alpha$  la forma è esatta in  $\mathbb{R}^2$

Essendo  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$  vale esatta  $\Leftrightarrow$  chiusa  
 $\uparrow$  sempl. comm.

$$A_y = 6x^3 y^5 \quad B_x = 4\alpha x^3 y^5 \quad \text{chiusa} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\leadsto x^3 y^6 dx + \left(\frac{3}{2} x^4 y^5 + e^y\right) dy$$

Cerco una primitiva "a occhio".

• Faccio la primitiva di  $A(x,y)$  risp. ad  $x$

$$\frac{1}{4} x^4 y^6 + \varphi(y)$$

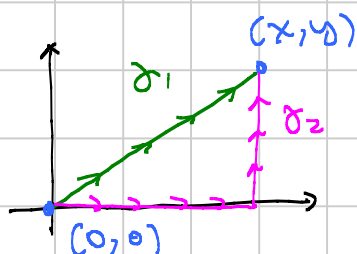
• Derivo risp. ad  $y$  e impongo venga  $B(x,y)$

$$\frac{3}{2} x^4 y^5 + \underbrace{\varphi'(y)}_{e^y} \leadsto \varphi(y) = e^y$$

$$\boxed{V(x,y) = \frac{1}{4} x^4 y^6 + e^y}$$

Oss. Se uno è disperato, può provare ad usare la costruzione della primitiva data dal teorema

$V(x,y) = \int_{\gamma} \omega$  dove  $\gamma$  è una qualunque curva che congiunge un pto scelto a caso con  $(x,y)$



Punto fisso:  $(0,0)$

curva: direttissima  $\gamma_1$  e/o  $\gamma_2$

Oss. 2 Due primitive della stessa forma differiscono per una funzione localmente costante, cioè costante sulle componenti connesse di  $\Omega$ .

Dim.  $V_1 - V_2 = \phi$  allora  $\nabla \phi =$  vettore nullo  
e le funzioni con gradiente nullo sono costanti sui connessi.

Oss. 3 Se  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , e  $\omega$  è esatta in  $\Omega_1$  ed in  $\Omega_2$ , allora è esatta in  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  e la primitiva è "l'unione" delle 2 primitive.  
Se  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ , allora possono essere guai

Esempio 3  $\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$

$$\gamma(t) = (1 + t^2 \sin(t^3), 2 + \cos(t^3)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare  $\int_{\gamma} \omega$

La forma non è la solita, ed è esatta in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .  
Una primitiva è

$$V(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$$

(senza vedere la primitiva, potrei sapere che è esatta se controllo che

→ è chiusa

→ l'integrale su una curva che gira intorno all'origine viene 0).

Ora uso la strategia 3 e faccio diff. tra valore negli estremi.

Esempio 4  $\omega = (y e^{xy}) dx + (x e^{xy} + e^{y^2}) dy$

$$\gamma(t) = (t+t^3, t-t^2) \quad t \in [0,1]$$

$$\int_{\gamma} \omega.$$

$\omega$  è chiusa in  $\mathbb{R}^2$ , quindi esatta

$$A_y = e^{xy} + xy e^{xy}$$

$$B_x = e^{xy} + xy e^{xy} \quad \text{😊}$$

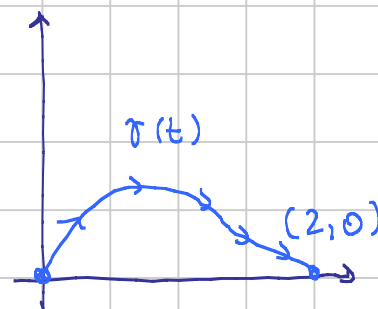
Una primitiva è:  $V(x,y) = e^{xy} + \text{primitiva di } e^{y^2} \quad \text{😞}$

La curva è semplice (prima componente), parte da (0,0) e arriva in (2,0)

Essendo la forma chiusa, posso sostituire  $\gamma$  con

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0,2]$$

e quindi



$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_0^2 \underset{\uparrow}{0} dt = 0$$

sulla prima componente  
per colpa di  $y e^{xy}$ , sulla seconda

comp. per colpa di  $\overset{\circ}{e^{y^2}}$   
che ha seconda comp. = 0

Oss. Veniva anche scrivendo la primitiva come

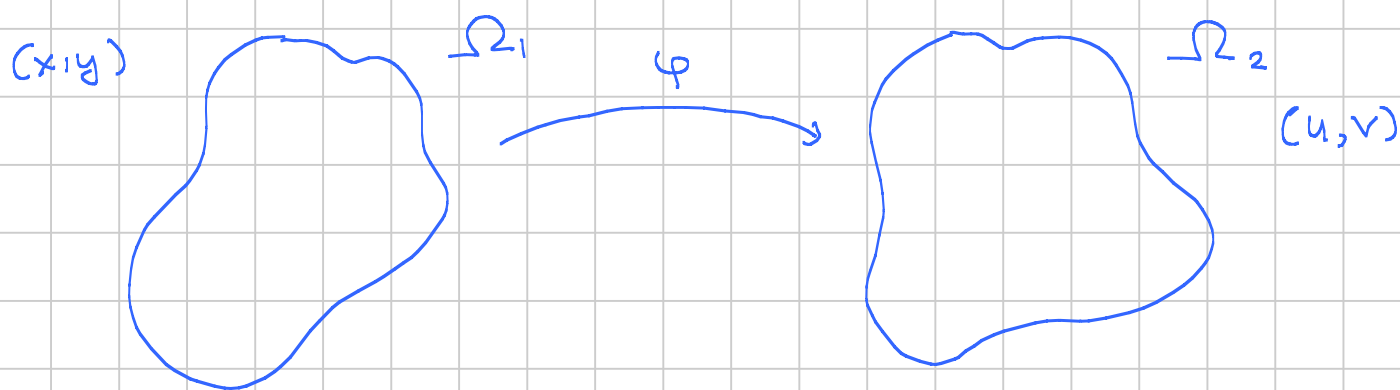
$$V(x,y) = e^{xy} + F(y)$$

↑ primitiva di  $e^{y^2}$

e sostituendo gli estremi

— 0 — 0 —

Tornando agli inizi: perché non è corretto identificare le forme con i campi di vettori.



$$\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

$$\text{Curve}(\Omega_1) = \{ \text{curve } \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_1 \}$$

$$\text{Curve}(\Omega_2) = \{ \text{" } \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_2 \}$$

Le curve vanno AVANTI: data  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_1$ ,  
definisco

$$\varphi_{\#} \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_2$$

come

$$\varphi_{\#} \gamma(t) = \varphi(\gamma(t)).$$

$$\text{Funzioni}(\Omega_1) = \{ f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R} \}$$

$$\text{" } (\Omega_2) = \{ f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R} \}$$

Le funzioni vanno INDIETRO: data  $g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$   
posso definire

$$\varphi_{\#} g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varphi_{\#} g)(x) = g(\varphi(x)) \quad \forall x \in \Omega_1$$

Stessa cosa se in arrivo c'è  $\mathbb{R}^d$  o un insieme  $X$  qualunque. Morale: i campi di vettori vanno INDIETRO per composizione.

Forme  $(\Omega_1) = \{ \text{forme diff. su } \Omega_1 \}$   
 "  $(\Omega_2) = \{ \text{ " " " } \Omega_2 \}$ .

Voglio che valano indietro salvando la dualità con le curve, cioè voglio definire

$$\varphi_{\#} : \text{Forme } (\Omega_2) \longrightarrow \text{Forme } (\Omega_1)$$

tale che

$$\int_{\varphi_{\#} \gamma} \omega = \int_{\gamma} \varphi_{\#} \omega \quad \begin{array}{l} \forall \text{ curva in } \Omega_1 \\ \forall \text{ forma in } \Omega_2 \end{array}$$

Come devo definire  $\varphi_{\#} \omega$ ? È un conto da fare...  
 e il risultato è che data

$$\omega = A(u, v) du + B(u, v) dv$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\#} \omega = & [A(f(x, y), g(x, y)) f_x(x, y) + B(f(x, y), g(x, y)) g_x(x, y)] dx \\ & + [A(\dots) f_y(x, y) + B(\dots) g_y(x, y)] dy \end{aligned}$$

La regola del tornare indietro per i campi di vettori e per le forme è diversa !!!

Brutalmente

$$\begin{aligned} \varphi_{\#} \omega &= A(f, g) df + B(f, g) dg \\ &= A(f, g) (f_x dx + f_y dy) \\ &\quad + B(f, g) (g_x dx + g_y dy) \end{aligned} \quad \text{😊}$$

Per giustificare rigorosamente la regola, scrivo

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\#} \gamma(t) &= (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) \\ &= (u(t), v(t))\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\varphi_{\#} \gamma} \omega = \int_a^b [A(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + B(u(t), v(t)) \dot{v}(t)] dt$$

Ora con la chain rule

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) &= f_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \\ \ddot{v}(t) &= \dots\end{aligned}$$

Sostituendo ottengo l'uguaglianza voluta

$$\int_{\varphi_{\#} \gamma} \omega = \int_{\gamma} \varphi_{\#} \omega$$