

Setting:  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $\omega$  forma differenziale in  $\Omega$

$$\omega = \sum_{k=1}^n A_k(x) dx_k$$

Def. (Forma ESATTA) Si dice che  $\omega$  è esatta in  $\Omega$  se esiste una funzione  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}(x) = A_k(x) \quad \forall k \in 1, \dots, n$$

La funzione  $V$  si dice primitiva della forma differenziale

Oss. Nel linguaggio dei fisici

- forma diff. esatta = campo di vettori conservativo
- primitiva = potenziale.

Achtung! Mai parlare di  $\omega$  esatta senza specificare DOVE.  
Infatti

- una stessa  $\omega$  può essere esatta in  $\Omega_1$  ma non in  $\Omega_2$
- $\omega$  può essere esatta in  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , ma non esatta in  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ .

Def. (Forma CHIUSA) Si dice che  $\omega$  è CHIUSA in  $\Omega$  se è di classe  $C^1$  e vale (che le derivate in croce sono =)

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Oss. La chiusura si comporta bene rispetto all'unione.

## Casi in dim. bassa

$$\boxed{n=2} \quad \omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

$$\text{Chiusa} \Leftrightarrow A_y(x,y) = B_x(x,y)$$

$$\boxed{n=3} \quad \omega = A(x,y,z) dx + B(\dots) dy + C(\dots) dz$$

$$\text{Chiusa} \Leftrightarrow \begin{cases} A_y = B_x \\ A_z = C_x \\ B_z = C_y \end{cases}$$

Quante sono le condizioni in  $\mathbb{R}^n$ ?  $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

Teorema 1  $\omega$  esatta e di classe  $C^1 \Rightarrow \omega$  chiusa  
in  $\Omega$  in  $\Omega$

Dim. È l'inversione dell'ordine di derivazione.  
Se è esatta, allora

$$A_k(x) = \frac{\partial V}{\partial x_k}(x)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial A_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{uguali} \end{array}$$

Corollario Se una forma  $\omega$  di classe  $C^1$  non è chiusa,  
allora di sicuro non è esatta.  
(La chiusura è facile da controllare).

**Prop.** Sia  $\omega$  esatta in  $\Omega$ . Sia  $V$  una primitiva di  $\omega$ .  
 Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva  $C^1$  a tratti.  
 Allora

$$\int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

**Dim.** Basta usare la definizione. Supponiamo  $\gamma$  tutta  $C^1$ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n A_k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \right) dt \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \right) dt \\ &\stackrel{\text{esatta}}{=} \int_a^b \left[ \frac{d}{dt} V(\gamma(t)) \right] dt \\ &\stackrel{\text{chain rule}}{=} \left[ V(\gamma(t)) \right]_{t=a}^{t=b} = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) \\ &\stackrel{\text{Analisi 1.}}{=} \quad \quad \quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Oss. Se  $\omega$  è esatta, l'integrale di  $\omega$  dipende solo dagli estremi della curva.

Se inverto il verso di percorrenza, vedo bene che il segno cambia.

Oss. Nella dim., se la curva è solo  $C^1$  a tratti, allora ripeto il ragionamento su ogni tratto e i punti intermedi se ne vanno telescopicamente.

### Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)

Sia  $\omega$  una forma diff. in  $\Omega$ .

Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

(i)  $\omega$  è esatta

(ii) per ogni coppia di curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  con gli stessi estremi vale

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

(iii) per ogni curva  $\gamma$  chiusa vale  $\int_{\gamma} \omega = 0$

### Dim.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) è la Prop. precedente

(i)  $\Rightarrow$  (iii) pure

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) una curva  $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$  chiusa ha gli stessi estremi della curva che resta sempre ferma in  $\gamma(a)$ . L'integrale di  $\omega$  su una curva costante è nullo perché  $\dot{\gamma}(t) \equiv 0$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Basta considerare la curva  $\gamma_3$  ottenuta facendo

$\rightarrow$  prima  $\gamma_1$

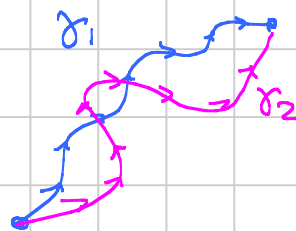
$\rightarrow$  poi  $\gamma_2$  in senso inverso

(scrivere per esercizio la formula per  $\gamma_3$ )

Allora

$$0 = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \quad \leadsto \quad (ii)$$

$\uparrow$  (iii)                       $\uparrow$  verso opposto



L'unica parte vera è dimostrare che (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Sotto l'ipotesi 2 devo trovare una primitiva.

Scelgo a caso un p.to  $x_0 \in \Omega$ .

Per ogni altro  $x \in \Omega$  considero una curva  $C^1$  a tratti a caso che unisce  $x_0$  a  $x$ , cioè  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  t.c.  $\gamma(a) = x_0$  e  $\gamma(b) = x$ .

Ora pongo

$$V(x) := \int_{\gamma} \omega \quad (\text{non dipende da } \gamma \text{ per la (ii)})$$

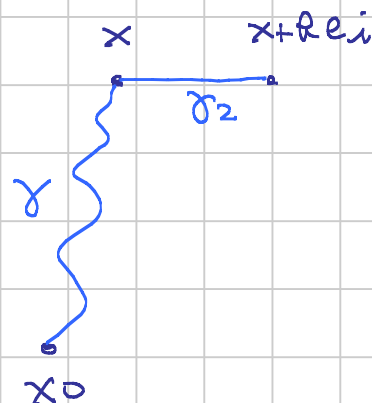
Devo dimostrare che è una primitiva, cioè

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = A_i(x)$$

Quindi prendo i rapporti incrementali

$$\frac{V(x + Rei) - V(x)}{R}$$

Per definire  $V(x + Rei)$  uso una curva che segue  $\gamma$  da  $x_0$  ad  $x$  e poi prosegue sul segmento



$$\gamma_2(t) := x + tRei \quad t \in [0, 1]$$

$$V(x + Rei) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = V(x) + \int_0^1 A_i(x + tRei) R dt$$

↑  
resta solo questa  
perché le altre compon.  
della curva sono  
costanti

Quindi

$$\frac{V(x + Rei) - V(x)}{R} = \int_0^1 A_i(x + tRei) dt$$

$$= A_i(x + cRei) \quad \text{con } c \in [0, 1] \quad (\text{teo. media integrale})$$

Quando  $h \rightarrow 0$  otteniamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x + h e_i) - V(x)}{h} = A_i(x)$$

"

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x).$$

— o — o —

Esempio

$$\omega = xy \, dx + \frac{x^2}{2} dy$$

$$\gamma(t) = (t^2 - \sqrt{t^8 + 1}, \arctan(t^2)) \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_{\gamma} \omega$$

La forma è esatta e una primitiva è

$$V(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y$$

$$\text{Inoltre } \gamma(0) = (-1, 0) \quad \gamma(1) = (1 - \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

Ora basta sostituire gli estremi

$$\int_{\gamma} \omega = V(1 - \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) - V(-1, 0).$$