

FORME DIFFERENZIALI

(Forme diff. lineari, dette anche 1-forme)

Def. (Da corso di servizio) Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, una forma diff. in Ω è un oggetto del tipo

$$\omega := \sum_{k=1}^n A_k(x) dx_k$$

dove $A_1(x), \dots, A_n(x)$ sono funzioni $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dette coeff. della forma

Esempi: (casi particolari)

$$\boxed{n=2} \quad \omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

$$\boxed{n=3} \quad \omega = A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$$

Def. (Vera) Una forma diff. in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è una applicazione

$$\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

↑ duale di $\mathbb{R}^n$

Parentesi di algebra lineare La base canonica $e_1, \dots, e_n$ induce una base canonica del duale $e_1^*, \dots, e_n^*$ definita da

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ogni el. di $(\mathbb{R}^n)^*$ si scrive come $d_1 e_1^* + \dots + d_n e_n^*$

Interpretiamo dx_i come il differenziale della funzione
 $x \rightarrow x_i$

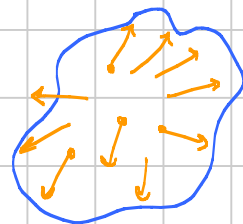
Il differenziale dx_i è proprio e_i^* .
— o — o —

Def. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, si dice campo di vettori una applicazione

$$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

In poche parole, in ogni punto $x \in \Omega$ sto assegnando un vettore

$$(A_1(x), \dots, A_n(x)).$$



Oss. L'identificazione di una forma diff.

$$\omega = A_1(x) dx_1 + \dots + A_n(x) dx_n$$

con il campo di vettori $(A_1(x), \dots, A_n(x))$ è scorretta,
ma per molte questioni valida
— o — o —

Integrale di una forma diff. lungo una curva

- ① Notazione
- ② Significato fisico
- ③ Definizione
- ④ Tecnica di calcolo

① Notazione

$$\int_{\gamma} \omega$$

↑
forma diff. definita
in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

↑
curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$

Di solito si assume

→ ω di classe C^0 (i coeff. sono continui)

→ γ di classe C^1 .

3-4) Nelle ipotesi di sopra si pone per definizione

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n A_k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \right) dt$$

$n=2$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

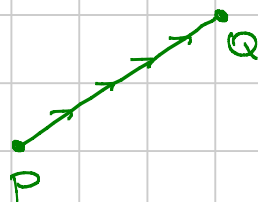
$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt$$

(ho sostituito x e y con $x(t)$ e $y(t)$ e
 $dx = \dot{x}(t) dt$ e $dy = \dot{y}(t) dt$)

2) Significato fisico Supponiamo $n=2$ per semplicità e
supponiamo di avere una forza F su
tutto il piano

$$\vec{F} = (A, B)$$

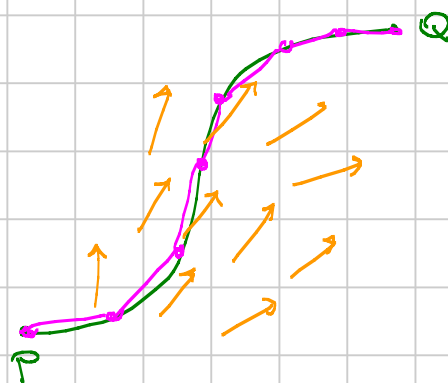
$$\begin{aligned} \text{Lavoro} &= \langle \text{Forza}, \text{Spostamento} \rangle \\ &= \langle \vec{F}, \vec{Q} - \vec{P} \rangle \end{aligned}$$



(se spostamento rettilineo e forza costante)

Se la forza non è costante $\vec{F}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$
e lo spostamento è una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
posso pensare di calcolare il lavoro facendo una
specie di somma di Riemann
sommando tratto per tratto

$$\begin{aligned} &\langle \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}), \vec{F}(\gamma(t_k)) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \vec{F}(\gamma(t_k)) \right\rangle (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$



Sto facendo una somma di Riemann per l'integrale

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

"

$$\int_a^b (A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)) dt \quad \text{😊}$$

Conclusione: se identifichiamo una forma con il campo che ha gli stessi coefficienti, e lo indichiamo con F , allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

Achtung! Occhio a non confondere l'integrale di una forma con quello di una funzione.
Sono imparentati nel senso che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b (A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(A(x, y) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + B(x, y) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \end{aligned}$$

posto che sia definito, è
il vettore tangente

Quindi posso pensare $\int_{\gamma} \omega$ come l'integrale su γ della
funzione "prod. scalare tra campo associato e vettore tang."
— o — o —

Comportamento per riparametrizzazione

- Brutalmente:
- Se percorro lo stesso sostegno nel verso opposto, allora l'integrale di una forma CAMBIA SEGNO
 - Se faccio avanti / indietro viene 0.
 - Tratti percorsi avanti / indietro si cancellano.

Teorema

Sia ω una forma diff. continua in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sia $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva di classe C^1 .

Sia $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione C^1 senza ipotesi di monotonia, ma con

$$\psi(c) = a \quad \text{e} \quad \psi(d) = b$$

e sia $\gamma_2(t) := \gamma_1(\psi(t)) \quad (\gamma_2: [c, d] \rightarrow \Omega)$

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Se invece $\psi(c) = b$ e $\psi(d) = a$, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Dim.

Uso la definizione e cambio variabile negli integrali:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \omega &= \int_c^d \left(\sum_{k=1}^n A_k(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_{2,k}(t) \right) dt \\ &\quad \downarrow \text{chain rule} \\ &= \int_c^d \left(\sum_{k=1}^n A_k(\gamma_1(\psi(t))) \dot{\gamma}_{1,k}(\psi(t)) \psi'(t) \right) dt \quad (s = \psi(t)) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n A_k(\gamma_1(s)) \dot{\gamma}_{1,k}(s) \right) ds = \int_{\gamma_1} \omega \end{aligned}$$

Non ho cambiato il segno se $\gamma(c) = a$ e $\gamma(d) = b$.
 Altrimenti gli estremi di integrazione vengono scambiati,
 da cui il cambio segno.

— o — o —

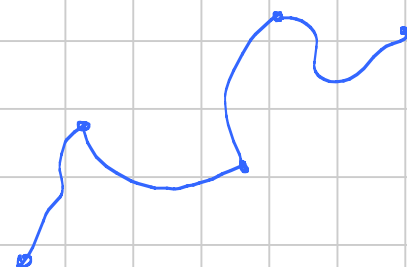
Oss. La definizione di integrale si estende a curve
 C^1 a tratti, cioè curve

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continue per cui esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
 tale che

γ è di classe C^1 in ogni sottointervallo $[t_{k-1}, t_k]$

L'integrale si definisce sommando
 i vari tratti



$$\int_{\gamma} \omega := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \omega$$

dove γ_k è la restrizione di γ a $[t_{k-1}, t_k]$.

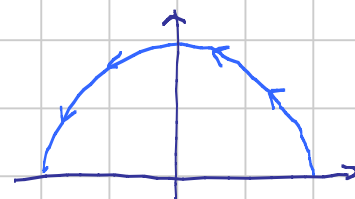
Oss. Se devo calcolare $\int_{\gamma} \omega$, posso scegliere la param. che
 semplifica maggiormente i calcoli!

Esempio $\omega = (x+y)dx + x^2 dy$ $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1, 1]$
 $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$

$$\int_{-1}^1 \left[(t + \sqrt{1-t^2}) \cdot 1 + t^2 (\sqrt{1-t^2})' \right] dt = \text{auguri! oppure}$$

$$- \int_0^{\pi} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + \cos^2 t \cdot \cos t] dt$$

↑
 γ_2 gira al contrario di γ .



— o — o —