

INTEGRALI CURVILINEI

(Integrali di funzioni lungo curve)

- ① Come si indicano
- ② Significato fisico/geometrico
- ③ Definizione (idea)
- ④ Come si calcolano

1 Notazioni

$\int_{\gamma} f(x,y) ds$

indica che si tratta di integrale curvilineo
 curva su cui si integra
 integranda
 elemento di lunghezza per i fisici

$\int_{\gamma} f(x) ds$

Si intende che

- $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ è una curva (diciamo almeno cont.)
- $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (basta che sia definita almeno sul supporto di γ).

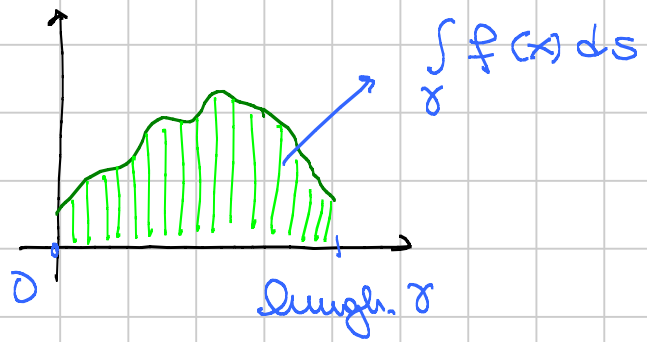
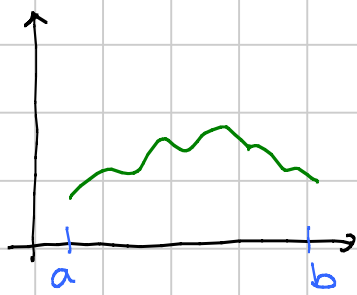
2 Significato geometrico

Data γ e data f , posso considerare

$f(\gamma(t)) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e descrive la quota dell'edificio al tempo t .

Di questa ora non mi importa nulla.

Considero invece la quota come funzione dello spazio percorso (vedi video con GPS)



3 **Definizione** Si può dare in vari modi diversi

Alla DARBOUX Considero una partizione qualunque di $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e poi faccio le somme inferiori e superiori del tipo

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{[\text{lunghezza curva tra } t_{k-1} \text{ e } t_k]}_{\text{base}} \underbrace{\sup \{f(t) : t \in [t_{k-1}, t_k]\}}_{\text{altezza}}$$

e idem con il inf per quelle inferiori.

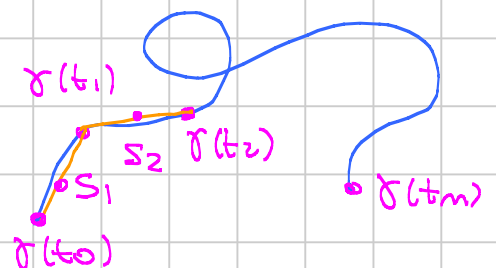
Poi la definizione prosegue come al solito : inf somme superiori e sup somme inferiori.

Alla RIEMANN (Usando le poligoni)

Assumiamo che $f(x)$ sia continua e definita almeno in un aperto che contiene il supporto

Considero la partizione di $[a, b]$ come sopra.

Vedo i con. p.ti sulla curva



Unisco i p.ti ottenendo la poligonale

Scelgo un p.to s_k come mi pare in ogni segmento

Costruisco infine la somma di Riemann

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\text{lungh. segm. } k\text{-esimo}} \cdot \underbrace{f(s_k)}_{\text{altezza rettangolo } k\text{-esimo}}$$

Dico che $\int_{\gamma} f(x) ds = I$ se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall$ partizione di $[a, b]$ con interv. di ampiezza $\leq \delta$ e $\forall$ taggamento dei segmenti

$$\left| \sum \text{riemann} - I \right| \leq \varepsilon.$$

Teorema Se f è continua e la curva è rettificabile, allora le due definizioni coincidono.

Dim. È la solita.

— o — o —

[4] Come si calcolano

Teorema Supponiamo $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^1 .

Allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{\text{fattore di conversione tra disegno in tempo e disegno in distanza}} dt$$

fattore di conversione tra disegno in tempo e disegno in distanza

Dim Dopo aver diviso in tratti, è la stessa della lunghezza di una curva.

Oss. L'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione allo stesso modo in cui non dipendeva la lunghezza.

Caso speciale: se $\gamma_2(t) = \gamma_1(\psi(t))$ con ψ di classe C^1 , deb. monotona e sng. $\psi: [c,d] \rightarrow [a,b]$ allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(x) ds &= \int_c^d f(\gamma_2(t)) \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt \\ &= \int_c^d f(\gamma_1(\psi(t))) \|\dot{\gamma}_1(\psi(t))\| \cdot |\psi'(t)| dt \\ y = \psi(t) &= \int_a^b f(\gamma_1(y)) \|\dot{\gamma}_1(y)\| dy \\ &= \int_{\gamma_1} f(x) ds. \end{aligned}$$

Def. Il baricentro di una curva nel piano è il punto di coordinate

$$x_G = \frac{\int x ds}{\text{lunghezza}(\gamma)}$$

$$y_G = \frac{\int y ds}{\text{lunghezza}(\gamma)}$$

Esempio 1 (Baricentro semicirc.)

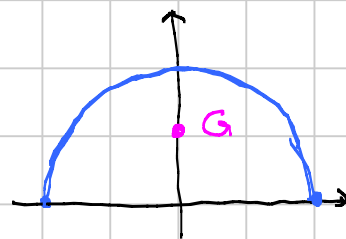
$$\gamma(t) = r(t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$

o meglio

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = r$$

(speed costante)



$$\int_{\gamma} x \, ds = \int_0^{\pi} \underbrace{r \cos t}_x \cdot \underbrace{r}_{\|\dot{\gamma}(t)\|} dt = r^2 \int_0^{\pi} \cos t \, dt = 0$$

(prevedibile per simmetria)

$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_0^{\pi} r \sin t \cdot r \, dt = r^2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt = 2r^2$$

$$y_G = \frac{2r^2}{\text{lunghezza}} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r$$

(confrontare con baricentro semicirconferenza)

— o — o —

Esempio 2 $\gamma(t) = (t^2, \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$
 (semplice perché prima comp. monotona)

$$f(x, y) = x^2 - xy$$

$$\int_{\gamma} f(x, y) \, ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{(t^4 - t^2 \cos t)}_{f(x(t), y(t))} \cdot \sqrt{4t^2 + \sin^2 t} \, dt$$

= non si fa per via elementare.

— o — o —

Oss. Per i fisici ds è l'"elemento di lunghezza"

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \, dt$$

$$dx = \dot{x}(t) \, dt$$

$$dy = \dot{y}(t) \, dt$$

— o — o —

