

Parentesi: stime su integrali vettoriali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ misurabile, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ con $d \geq 1$

Si definisce $\int_{\Omega} f(x) dx$ come il vettore che ha come

componenti l'integrale delle componenti di $f(x)$ (che assumiamo essere integrabili).

Prop. 1 (Stima dall'alto per int. vettoriale)

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

(Norme di vettori)

Dim. (si fa per dualità)

Fisso un qualunque $v \in \mathbb{R}^d$. Allora

$$\langle v, \int_{\Omega} f(x) dx \rangle = \sum_{i=1}^d v_i \int_{\Omega} f_i(x) dx$$

linearità dell'integr. $\rightarrow$
$$= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^d v_i f_i(x) \right) dx$$

$$= \int_{\Omega} \langle v, f(x) \rangle dx$$

c.s. $\rightarrow$
$$\leq \int_{\Omega} \|v\| \cdot \|f(x)\| dx$$

$$= \|v\| \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

Distinguo due casi:

① Se $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$, allora non c'è nulla da dire.

② Se $\int_{\Omega} f(x) dx = w \neq 0$, allora uso $v := \frac{w}{\|w\|}$ e ottengo

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| &= \frac{\left\langle \int_{\Omega} f(x) dx, \int_{\Omega} f(x) dx \right\rangle}{\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\|} \\ &\leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx. \end{aligned}$$

— o — o —

Esercizio per capire la dimostrazione

→ Provare a generalizzare al caso della norma cubica.

→ " " " con una norma qualunque su $\mathbb{R}^d$.

— o — o —

Prop. 2 (Stima dal basso per integrale vettoriale)

Per ogni $x_0 \in \Omega$ vale la stima

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \geq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx - 2 \int_{\Omega} \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Dim. Ci sono due passaggi "ad operazioni scambiate"

Primo passo: scomporre, integrare e triangolare $\geq$

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f(x_0) dx + \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) dx$$

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \text{meas}(\Omega) f(x_0) + \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) dx$$

Facciamo le norme ottengo

$$(\|A+B\| \geq \|A\| - \|B\|)$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| &\geq \text{meas}(\Omega) \|f(x_0)\| - \left\| \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) dx \right\| \\ &\geq \text{meas}(\Omega) \|f(x_0)\| - \int_{\Omega} \|f(x) - f(x_0)\| dx \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Prop. 1} \end{aligned}$$

Secondo passo: scompongo, triangolare $\leq$, integro

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) \quad (\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|)$$

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\|$$

$$\int_{\Omega} \|f(x)\| dx \leq \text{meas}(\Omega) \|f(x_0)\| + \int_{\Omega} \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

da cui

$$\text{meas}(\Omega) \|f(x_0)\| \geq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx - \int_{\Omega} \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Sostituendo nella disug. alla fine del primo passo ottengo la tesi.

— o — o —

Teorema Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva di classe C^1 .

Allora

$$\text{length}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Dim. Si tratta di dimostrare due disuguaglianze.

≤ Devo dimostrare che per ogni partizione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

vale la stima

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\text{lunghezza poligonale}} \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (\text{da cui } \text{lunghezza}(\gamma) \leq \int)$$

Basta osservare che

$$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt$$

Usando la prop. 1 ottengo

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^n \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right\|$$

$$\stackrel{\text{Prop. 1.} \nearrow}{\leq} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad \text{☺}$$

≥ Dimostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tale che

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon$$

(da cui $\text{lunghezza}(\gamma) \geq \int - \varepsilon$)

Usiamo l'uniforme continuità di $\dot{\gamma}(t)$ e prendiamo il $\delta > 0$ che corrisponde a

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

cioè

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t_1) - \dot{\gamma}(t_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Prendo una partizione qualunque fatta da intervalli di ampiezza $\leq \delta$ e dico che questa va bene.

Per la prop. 2 vale la stima

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \\ &\geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underbrace{\|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_k)\|}_{\substack{\text{p.to a caso} \\ \text{nell'intervallo} \\ \downarrow \\ \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}}} dt \\ &\geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \frac{\varepsilon}{(b-a)} (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Quando sommo su k ottengo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &\geq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon. \quad \text{☺} \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Oss. Abbiamo usato Prop. 1 e 2 con $\Omega = [a, b]$ o $[t_{k-1}, t_k]$, comunque in dim 1 in partenza, ma d in arrivo.

Oss. Brutalmente, l'idea della dim. è semplice

$$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \sim (t_k - t_{k-1}) \dot{\gamma}(t_k)$$

se $\uparrow$ l'intens.
è "piccolo"

e quindi

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \sim (t_k - t_{k-1}) \cdot \|\dot{\gamma}(t_k)\|$$

d'altra parte

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \sim (t_k - t_{k-1}) \cdot \|\dot{\gamma}(t_k)\|$$

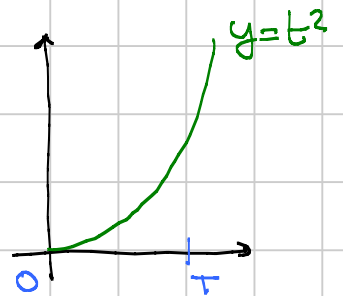
e quindi i 2 sono uguali.

La dim. ufficiale precisa questi $\sim$.

Esempio 1 Lunghezza tratto di parabola

$$\gamma(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, T]$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x(t)$ $y(t)$



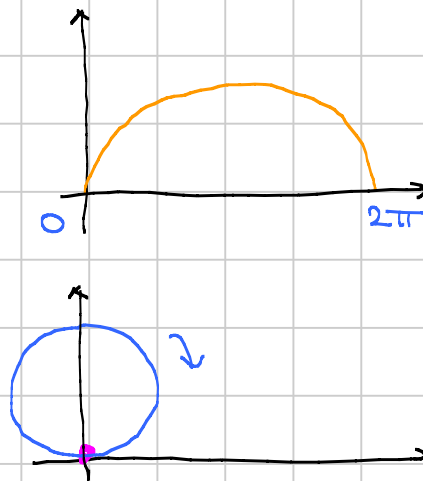
$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \int_0^T \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

= si fa in vari modi.

Esempio 2 Cicloride

Traiettoria descritta da un p.to fissato su una circ. che ruota in una direzione. Si vede che



$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{lunghezza} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \quad \uparrow \text{pongo } t = 2y \text{ e se ne va la radice.}$$

Esempio 3 Curva a valori in una sfera di raggio 1.
Det. formula per la lunghezza.

$$x(t) = \cos \varphi(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \cos \varphi(t) \sin \theta(t)$$

$$z(t) = \sin \varphi(t)$$

$$\dot{x} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta$$

$$\dot{y} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta$$

$$\dot{z} = \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi}$$

↑
vicino ai poli cambiare
θ conta poco!

— o — o —