

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.

Si definisce lunghezza di γ (il sup delle lunghezze delle poligoni inscritte) il

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

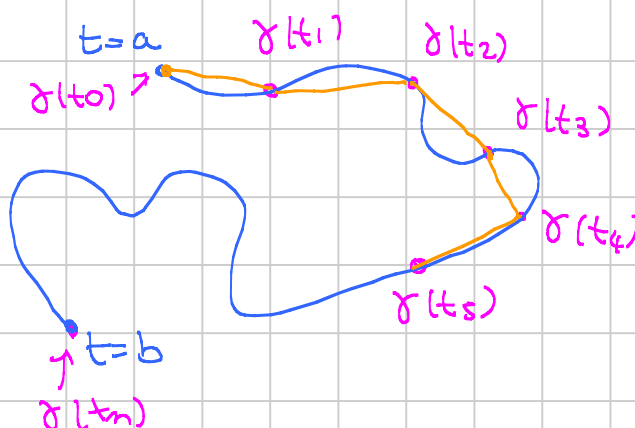
il sup è fatto al variare della partizione di $[a, b]$

Interpretazione geometrica

Fisso una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e fotografo dove si trova la curva ai vari tempi;



La lunghez. di ogni segmento è $\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$

Sommando su k ottengo la lunghez. della spezzata che moralmente è meno della lunghez. della curva.

Mi aspetto che rendendo la partizione più fitta finisco per approssimare la "lunghez" della curva.

L'approssimazione avviene dal basso.

Def. Se $\text{lunghe}(\gamma) \in \mathbb{R}$, si dice che la curva ha lunghezza finita oppure (sinoquis) che è rettificabile.

Prop. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva Lipschitziana.
Allora

$$\text{Lunghe}(\gamma) \leq L \cdot (b-a)$$

↑
cost. di Lip.

Dim. Per ogni partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ vale

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^n L (t_k - t_{k-1}) = L(b-a).$$

— o — o —

Esempi di curve di Lunghe. infinita

Esempio 1 (Fatto apposta)

Il disegno in figura è il grafico di una funzione $f(x)$

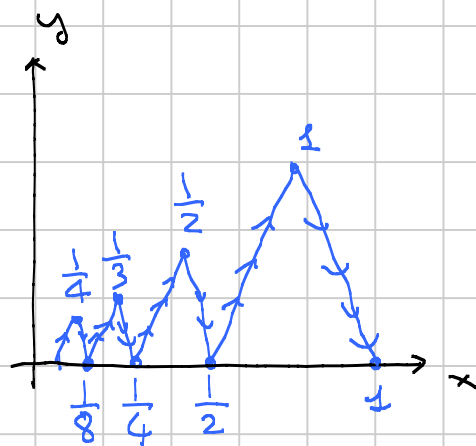
$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

continua.

Considero la curva

$$\gamma(t) := (t, f(t)) \quad t \in [0, 1]$$

(curva cartesiana che percorre il grafico)



Per definizione $\text{Lunghe}(\gamma) \geq$ somma lunghe lati obliqui

che è $\geq$ della somma delle lunghe. delle altezze, la quale è una serie armonica divergente.

— o — o —

Esempio 2 (Fatto meno apposta)

$$\gamma(t) = (t, t \sin^2 \frac{1}{t}) \quad t \in [0, 1]$$

Stimo la lunghezza con la poligonale che sta sotto le ultime n "colline".

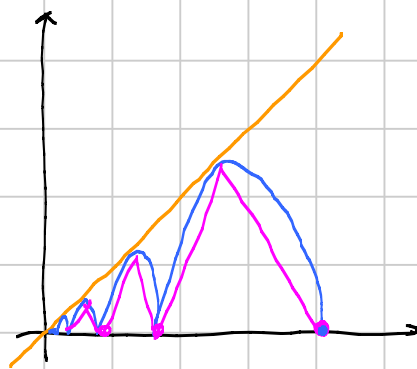
Le altezze dei triangoli sono corrispondenti a

$$\frac{1}{t_k} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \leadsto \quad t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \sim \frac{1}{k}$$

Ancora una volta ottengo poligonali lunghe almeno

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad \text{e questa diverge.}$$

— o — o —



Esercizio Dimostrare che esiste una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ che è α -Hölder per ogni $\alpha \in (0, 1)$ e che ha lunghezza infinita.

— o — o —

Teorema Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 .

Allora

$$\text{lung}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Fisicamente: la lunghezza è l'integrale della speed

$$S = v \cdot T.$$

Domanda: se due curve percorrono lo stesso sostegno, avranno la stessa lunghezza?

No in generale, perché i tratti percorsi più volte contano con molteplicità

Sì, se le due curve percorrono lo stesso sostegno "in maniera analoga".

Teorema 1 (Riparametrizzazione C^1)

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 .

Sia $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione di classe C^1 monotona (debolmente) e surgettiva.

Consideriamo la curva $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ def. da

$$\gamma_2(t) = \gamma(\psi(t)) \quad \forall t \in [c, d]$$

↑
è la "stessa curva" percorsa
con un ritmo diverso

Allora $\text{lunga}(\gamma_2) = \text{lunga}(\gamma)$

Dim Per chain rule si ha che

$$\dot{\gamma}_2(t) = \dot{\gamma}(\psi(t)) \psi'(t)$$

Ma allora

$$\text{lunga}(\gamma_2) = \int_c^d \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt = \int_c^d \|\dot{\gamma}(\psi(t))\| \cdot |\psi'(t)| dt$$

ho supposto $\psi'(t) \geq 0$ → $= \int_c^d \|\dot{\gamma}(\psi(t))\| \cdot \psi'(t) dt$

$$s = \psi(t)$$

$$ds = \psi'(t) dt$$

↑
se fosse ≤ 0

$$= \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| ds$$

devo mettere segno - ma invertire gli estremi.

Teorema 2 (Riparametrizzazione C^0)

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva (non serve nemmeno C^0)

Sia $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ (continua e) debolmente monotona.

Sia γ_2 come prima.

$\Rightarrow$ conseguenza

e surgettiva

Allora

$$\text{Lunghezza}(\gamma_2) = \text{Lunghezza}(\gamma)$$

Dim. Occorre creare una corrisp. biunivoca tra le poligoni per γ e quelle per γ_2 .

Da γ_2 a γ $c = s_0 < s_1 < \dots < s_n = d$

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1})\| = \sum_{k=1}^n \|\gamma(\underbrace{\psi(s_k)}_{t_k}) - \gamma(\underbrace{\psi(s_{k-1})}_{t_{k-1}})\|$$

Ponendo $t_k := \psi(s_k)$, supponendo ψ deb. crescente vale

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b.$$

e il RHS diventa poligonale per γ .

Da γ a γ_2 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^n \|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1})\|$$

con $c = s_0 < s_1 < \dots < s_n = d$.

Per questo basta porre $\psi(s_k) = t_k$ per $k = 1, \dots, n$

$\uparrow$
per la surgettività posso risolvere, magari in modo non unico, ma la soluz. verificano $s_k > s_{k-1}$

— o — o —

Casi speciali della formula per la lunghezza

① Curve cartesiane $(t, f(t))$ $t \in [a, b]$.

Allora

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2} dt$$

② Curve in coord. polari $\rho(t), \theta(t)$ $t \in [a, b]$

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2} dt$$

— 0 — 0 —