

Integrali dipendenti da parametro

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme misurabile

Sia $(t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo

Sia $f: (t_1, t_2) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Posso definire $\varphi: (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} f(t, x) dx_1 \dots dx_m$$

Vogliamo studiare continuità e derivabilità di φ .

Teorema 1 Supponiamo Ω misurabile (e anche limitato).
Supponiamo $f(t, x)$ uniformemente continua
in $(t_1, t_2) \times \Omega$.
Allora φ è continua in (t_1, t_2) .

Dim. Prendo $t_0 \in (t_1, t_2)$, prendo $\varepsilon > 0$ e cerco $\delta > 0$ t.c.

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad |t - t_0| \leq \delta$$

Ora

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= \left| \int_{\Omega} [f(t, x) - f(t_0, x)] dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(t, x) - f(t_0, x)| dx \end{aligned}$$

Ora nell'unif. continuità di f prendo $\frac{\varepsilon}{\text{meas}(\Omega)}$ e trovo un $\delta > 0$ t.c.

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \frac{\varepsilon}{\text{meas}(\Omega)} \quad \forall x \in \Omega$$

Con questo δ concludo

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{\text{meas}(\Omega)} dx = \varepsilon$$

— o — o —

Oss 1 L'uniforme continuità è quella che mi garantisce che la stima vale per ogni $x \in \Omega$. La sto usando nella coppia, nel senso che (t, x) è vicino al p.to (t_0, x)

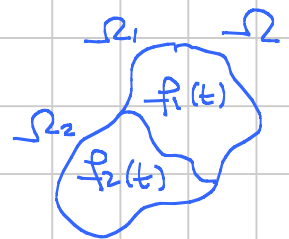
Oss 2 Ho usato di meno, cioè che f è continua in t_0 uniformemente rispetto ad x .

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega$$

↑
Questo δ NON deve
dipendere da x

Esempio Se pongo

$$f(t, x) := \begin{cases} f_1(t) & \text{se } x \in \Omega_1 \\ f_2(t) & \text{se } x \in \Omega_2 \end{cases}$$



allora se f_1 ed f_2 sono continue vale il teorema, anche se $f(t, x)$ rispetto alla variabile x può non essere nemmeno continua.

Oss. Se nell'oss. 2 assumo f unif. cont. in t unif. rispetto ad x , allora la $\varphi(t)$ risulta unif. cont. in t .

— o — o —

Teorema 2 Supponiamo Ω misurabile e limitato.
Supponiamo $f(t, x)$ derivabile rispetto alla
variabile t in $(t_1, t_2) \times \Omega$ e supponiamo

$$f_t(t, x) \text{ unif. cont. in } (t_1, t_2) \times \Omega$$

(ma sono possibili le stesse varianti
di prima)

Allora φ è derivabile in (t_1, t_2) e

$$\varphi'(t) = \int_{\Omega} f_t(t, x) dx \quad \forall t \in (t_1, t_2)$$

Teo. scambio: la deriv. dell'integrale è
l'integrale della derivata

Dim. Prendo $t_0 \in (t_1, t_2)$ e faccio il rapporto incrementale
sperando che

$$\frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} \rightarrow \int_{\Omega} f_t(t_0, x) dx$$

Conviene portare tutto dalla stessa parte

$$\int_{\Omega} \left[\frac{f(t_0+h, x) - f(t_0, x)}{h} - f_t(t_0, x) \right] dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h}}$

Prendo $\varepsilon > 0$ e spero di trovare $\delta > 0$ t.c.

$$\left| \int_{\Omega} \dots \right| \leq \varepsilon \quad \forall |h| \leq \delta$$

Come sempre

$$\left| \int_{\Omega} \dots \right| \leq \int_{\Omega} \left| \underbrace{\frac{f(t_0+R, x) - f(t_0, x)}{R}}_{f_t(t_0+C(x, R), x)} - f_t(t_0, x) \right| dx$$

↑
compreso tra 0 ed R
ma può dipendere da x

Ora scelgo il δ nell'unif. continuità in modo tale che

$$\|(t_1, x) - (t_2, x)\| \leq \delta \Rightarrow |f_t(t_1, x) - f_t(t_2, x)| \leq \frac{\varepsilon}{\text{meas}(\Omega)}$$

e la conclusione è la stessa di prima.

Oss. Per quanto ne sappiamo $C(R, x)$ potrebbe dipendere in modo nemmeno misurabile da x , ma la stima vale comunque

CASO DELLA DIMENSIONE 1

Consideriamo una funzione del tipo

$$\varphi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$$

Sotto opportune ipotesi φ risulta derivabile dove è definita e vale

$$\varphi'(t) = f(t, b(t)) b'(t) - f(t, a(t)) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(t, x) dx$$

Ipotesi ampiamente suff.: $a(t)$ e $b(t)$ derivabili e $f_t(t, x)$ esistente e unif. cont. nella coppia

Dici Considero la funzione di 3 variabili

$$\Phi(t, a, b) := \int_a^b f(t, x) dx$$

Da Analisi 1 sappiamo che

$$\Phi_b(t, a, b) = f(t, b)$$

$$\Phi_a(t, a, b) = -f(t, a)$$

Dal teo. precedente sappiamo che

$$\Phi_t(t, a, b) = \int_a^b f_t(t, x) dx$$

Ora $\varphi(t) = \Phi(t, a(t), b(t))$, quindi è una funzione composta, che derivo con la chain-rule

$$\varphi'(t) = \Phi_a(\dots) a'(t) + \Phi_b(\dots) b'(t) + \Phi_t(\dots)$$

= formula data.

— o — o —

Oss. Seme della differenziabilità, che segue dal diff. totale via continuità delle derivate parziali.

— o — o —

Quando gli integrali diventano impropri sono guai e serve un'ulteriore ipotesi, cioè la DOMINAZIONE.

Teorema (Modello) Sia $f: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ unif. continua.
Pongo

$$\varphi(t) := \int_0^{+\infty} f(t, x) dx$$

mettiamo che sia definito
per ogni $t \in \mathbb{R}$

Supp. che f sia dominata, cioè esiste $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
tale che $|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$

con

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

(questo garantisce la
conv. dell'int. che definisce
 φ)

Allora φ è continua.

Dim. Quella precedente fallisce dopo

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| = \int_0^{+\infty} |f(t, x) - f(t_0, x)| dx = (\star)$$

Ora, dato $\varepsilon > 0$, scelgo A in modo tale che

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

A questo punto

$$\begin{aligned} (\star) &= \int_0^A |f(t, x) - f(t_0, x)| dx + \int_A^{+\infty} | \dots | dx \\ &\leq \int_A^{+\infty} |f(t, x)| + |f(t_0, x)| dx \\ &\leq 2 \int_A^{+\infty} g(x) dx \\ &\stackrel{\text{Dominazione}}{\leq} \frac{1}{2} \varepsilon \end{aligned}$$

Sul primo termine come con gli integrali propri, scegliendo il δ che nell'o.c. fa venire fuori

$$\frac{1}{2A} \varepsilon$$

— o — o —