

Coord. sferiche in  $n$ -variabili : ogni volta di aggiunge un nuovo angolo  $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Detti  $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$  gli  $(n-1)$ -angoli che si usano, allora

$$x_m = \rho \sin \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \rho \cos \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-2} = \rho \cos \varphi_{m-1}$$

coord. sferiche in  
dimensione  $n-1$

Il Det jacobiano è del tipo  $\rho^{m-1} g(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})$

(si dimostra per induzione o osservando che la matrice ha tutte le righe tranne 1 con dei  $\rho$ )

C'è una formula per  $\int_{S^{m-1}} g(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})$   
 $\uparrow$  integrale rispetto agli angoli

Calcolo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} dx_1 \dots dx_m &= \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d\rho \underbrace{\int_{S^{m-1}} g(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}) \rho^{m-1}}_{I_n} \\ &= \int_0^{+\infty} \rho^{m-1} e^{-\rho^2} d\rho \cdot I_n \quad \text{Pongo } x = \rho^2 \\ &\quad dx = 2\rho d\rho \leadsto d\rho = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{m-1}{2}} e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \cdot I_n = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x} dx}_{\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot I_n \\ &= \frac{1}{2} I_n \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \end{aligned}$$

Lo stesso conto in cartesiane fornisce

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} dx_1 e^{-x_1^2} \int_{\mathbb{R}} dx_2 e^{-x_2^2} \dots = (\sqrt{\pi})^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Conclusione

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} I_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \leadsto \boxed{I_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}$$

$$\boxed{n=2} \leadsto \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \quad I_2 = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi}{0!} = \textcircled{2}$$

$$\boxed{n=3} \leadsto \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi = 4\pi; \quad I_3 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 4\pi \textcircled{3}$$

Applicazione: Nuovo calcolo volume di  $B_n(\mathbb{R})$

$$\int_{B_n(\mathbb{R})} 1 dx_1 \dots dx_n = \int_0^R dp \int_{S^{n-1}} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} p^{n-1} g(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$$

$$= I_n \int_0^R p^{n-1} dp = I_n \frac{R^n}{n} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n$$

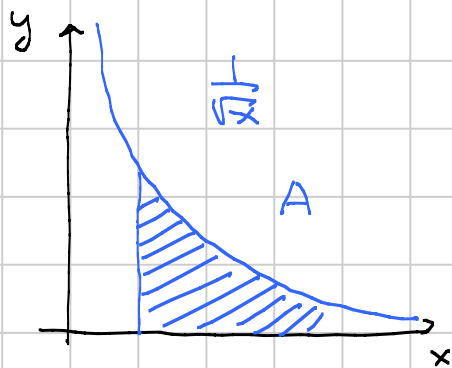
Possibile variante Calcolo l'altezza del baricentro della metà di  $B_n(\mathbb{R})$

[Idea: integrare per sezioni rispetto all'ultima variabile]

## Esercizio 1

$$\iint_A \frac{1}{x^a + y^a} dx dy$$

Esplorazione:



$$\iint_A \frac{1}{x^a + y^a} dx dy \leq \iint_A \frac{1}{x^a} dx dy$$

rimuoviamo a  
y è poca  
rimuoviamo

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{x^a} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1/2}} dx \quad \text{per } a > \frac{1}{2} \text{ conv.}$$

In realtà ho dim. rigorosamente che per  $a > \frac{1}{2}$  si ha conv.  
Devo fare parte opposta

$$\iint_A \frac{1}{x^a + y^a} dx dy \geq \iint_A \frac{1}{2x^a} dx dy = \text{come sopra} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1/2}} dx = +\infty$$

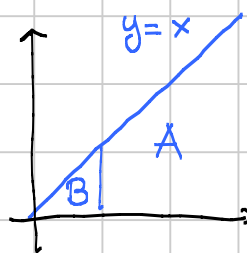
↑  
ho usato  $x \geq y$

se  $a \leq \frac{1}{2}$

## Esercizio 2 (sottinteso: $a > 0$ )

$$\iint_A \frac{x}{x^2 + y^a} dx dy$$

$$\iint_B \frac{x}{x^2 + y^a} dx dy$$



$$\iint_B \frac{x}{x^2 + y^a} dx dy \leq \iint_B \frac{x}{x^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{x}{x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{x^2} dx = \text{converge per ogni } a > 0$$

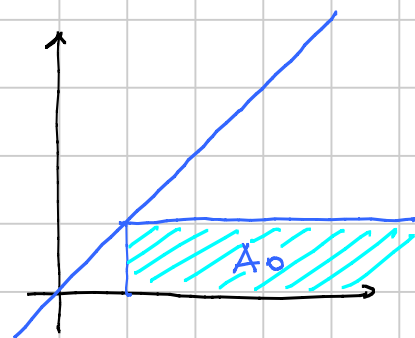
$$\iint_A \frac{x}{x^2 + y^a} dx dy \geq \iint_A \frac{x}{x^2 + x^a} dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^x dy \dots$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + x^a} dx dy = +\infty \quad \text{per } a \leq 3$$

Idea: abbiamo perso troppo con la disuguaglianza, quindi conviene diminuire la zona di integrazione

$$\iint_A \frac{x}{x^2+y^a} dx dy \geq \iint_{A_0} \dots$$

$$\begin{aligned} &\geq \iint_{A_0} \frac{x}{x^2+1} dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x}{x^2+1} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = +\infty \text{ per ogni } a > 0. \end{aligned}$$



Esercizio 3  $\iint_A \frac{x}{x^2+y^a} dx dy$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, x \leq y \leq 2x\}$$

Ora davvero il cutoff è 3

$$\frac{x}{x^2+(2x)^a} \leq \frac{x}{x^2+y^a} \leq \frac{x}{x^2+x^a}$$

Esempio 4  $\iint_A \frac{x}{x^a+y^2} dx dy$

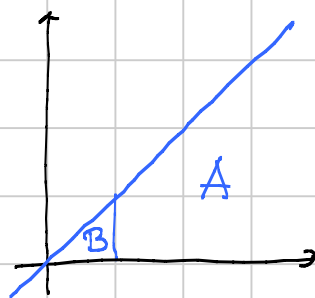
$$\iint_B \frac{x}{x^a+y^2} dx dy$$

A e B come nell'esercizio 2

$$\iint_A \frac{x}{x^a+y^2} dx dy \leq \iint_A \frac{x}{x^a} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^x dy \frac{x}{x^a} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a-2}} dx$$

Per  $a > 3$  converge

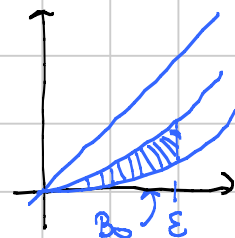


Basta dimostrare che diverge per  $a = 3$  (a quel p.to per  $a < 3$  è ancora peggio)

$$\iint_A \frac{x}{x^3+y^2} dx dy \geq \iint_A \frac{x}{x^3+x^2} dx dy = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+x^2} dx = +\infty$$

$$\iint_B \frac{x}{x^a + y^2} dx dy$$

Proviamo con  $a=4$



$$\iint_B \frac{x}{x^4 + y^2} dx dy$$

Prendo una zona del tipo

$$x^2 \leq y \leq 2x^2$$

$$\begin{aligned} \geq \iint_{B_0} \dots &\geq \iint_{B_0} \frac{x}{x^4 + 4x^4} dx dy = \int_0^\epsilon dx \int_{x^2}^{2x^2} dy \frac{x}{5x^4} \\ &= \int_0^\epsilon \frac{x^3}{5x^4} dx = +\infty \end{aligned}$$

giusto giusto

Ho dimostrato che per  $a \geq 4$  diverge

Per dimostrare la convergenza per  $a < 4$  faccio la primitiva!

$$\int \frac{1}{b+y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan \frac{y}{\sqrt{b}}$$

$$\iint_B \frac{x}{x^a + y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{x}{x^a + y^2}$$

$$= \int_0^1 dx \times \frac{1}{\sqrt{x^a}} \left[ \arctan \frac{y}{\sqrt{x^a}} \right]_0^x$$

$$\leq \frac{\pi}{2}$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{a}{2}-1}} dx$$

e questo per  $a < 4$   
converge !!

— 0 — 0 —