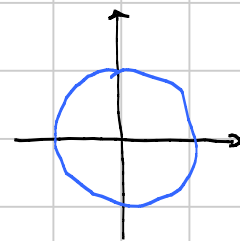


Esempio 1 $\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$$

Oss: se convergesse, convergerebbe a 0 per simmetria

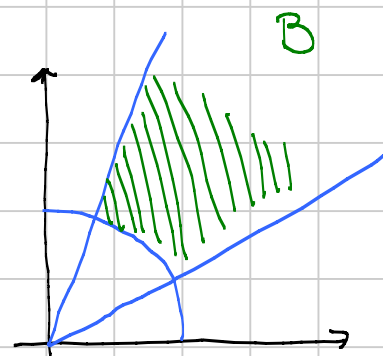


Bruttalmente: $f(x,y) \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{\rho^2} \rightarrow \text{diverge}$

vicino agli assi non è molto sensata

L'idea è di restare lontani dagli assi

Considero una zona B definita da



$$\rho \geq 1 \quad 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

↑ ↑
fissati una volta per tutte

Osservo che $\int_{\text{1° quadrante}} f(x,y) dx dy \geq \int_B f(x,y) dx dy$

e in B vale la disuguaglianza

$$f(x,y) = \frac{\arctan[\rho^2 \cos \theta \sin \theta]}{\rho^2} \geq \frac{\arctan[\cos \theta \sin \theta]}{\rho^2}$$

↑
 $\rho \geq 1$

$$\geq \frac{\arctan m}{\rho^2} \quad \leftarrow \min \{ \cos \theta \sin \theta : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \} > 0 \text{ per Weierstrass.}$$

$$\iint_B f(x,y) dx dy \geq \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan m}{\rho^2} \cdot \rho = +\infty$$

Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^4} dx dy$$

SLOGAN: Pareggiare gli esponenti !!!

Pongo $x = u^2, y = v$ La funzione diventa $\frac{1}{u^4 + v^4}$

Dopo calcolare $J(u, v)$ $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\leadsto J(u, v) = 2u$$

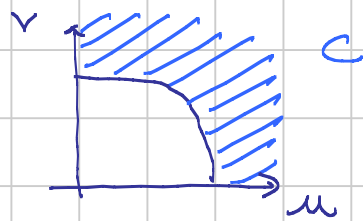
L'insieme di integrazione A è diventato $u^4 + v^2 \geq 1$.
Quindi

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^4} dx dy = \iint_C \frac{1}{u^4 + v^4} \cdot 2u du dv$$

dove $C := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u^4 + v^2 \geq 1\}$

Ora l'integrale su C è equivalente a quello su $u^2 + v^2 \geq 1$

e questo converge perché è del tipo $\frac{1}{p^3}$

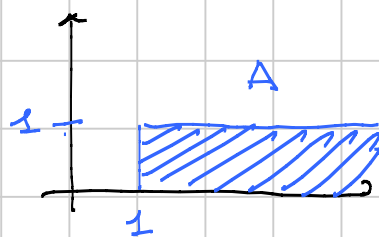


$$\frac{2 \rho \cos \theta}{\underbrace{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}_{\geq \rho^4}} \leq \frac{2}{\rho} \frac{1}{\rho^3}$$

— 0 — 0 —

Esempio 3

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$



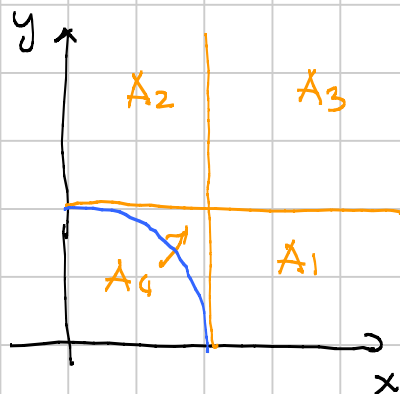
$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \leq \iint_A \frac{1}{x^2} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \boxed{\frac{1}{x^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

Esempio 4

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} dx dy$$

↑
esterno del solito
settoe nel 1° quadrante



Su A_4 nessun problema

Su A_1 ragionare come nell'esempio 3

$$\iint_{A_1} \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} dx dy \leq \iint_{A_1} \frac{1}{x^2} dx dy < +\infty$$

Su A_2 è uguale

Su A_3 vale

$$\iint_{A_3} \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} dx dy \leq \iint_{A_3} \frac{1}{x^2y^2} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy \frac{1}{x^2y^2} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_1 \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}}_1 = 1.$$

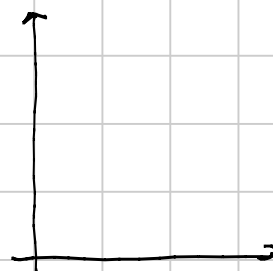
Esempio 5

$$\iint_{A_a} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

dove $A_a := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^a \}$

• Se $a < 1$, ragioniamo come nell'esempio 3

$$\begin{aligned} \iint_{A_a} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy &\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^a} \frac{1}{x^2} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-a}} dx \quad \text{e quindi converge.} \end{aligned}$$



• Se $a \geq 1$, allora A_a contiene il settore

$$\rho \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \iint_{A_a} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy &\geq \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

— 0 — 0 —