

VOLUME PALLA n DIMENSIONALE

$$B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$$

$$\text{meas}(B_n(R)) = \omega_n R^n$$

Dimostriamo che

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

dove $\Gamma(x)$ è la Gamma di Eulero, definita da

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x > 0$$

Proprietà della Γ :

- ① $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad \forall x > 0$
- ② $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall \text{ intero } n \geq 1$
- ③ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (integrale Gaussiano)

Scritture alternative di ω_n :

• se $n = 2k$ diventa $\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{\pi^k}{k!}$

quindi

$$\text{meas}(B_{2k}(R)) = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

• se $n = 2k+1$ diventa $\omega_{2k+1} = \frac{\pi^k \sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1 + \frac{1}{2})}$

$$\Gamma(k+1 + \frac{1}{2}) = (k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \cdots \frac{3}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$$

$\sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2k+1)}{2} \frac{(2k-1)}{2} \frac{(2k-3)}{2} \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi} \frac{(2k)(2k-2)\dots 2}{(2k)(2k-2)\dots 2} \\
 &= \frac{(2k+1)!}{2^{k+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2^k k!}
 \end{aligned}$$

Aggiunto dopo video

Sostituendo diventa

$$\omega_{2k+1} = \frac{\pi^k \sqrt{\pi} 4^k k! \cdot 2}{(2k+1)! \sqrt{\pi}} = \frac{2(4\pi)^k k!}{(2k+1)!}$$

e quindi

$$\text{meas}(B_{2k+1}(R)) = \frac{2(4\pi)^k k!}{(2k+1)!} R^{2k+1}$$

Controllo : $k=0 \rightsquigarrow 2R$ 😊

$$k=1 \rightsquigarrow \frac{2 \cdot 4\pi}{3!} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{😊}$$

— 0 — 0 —

1° approccio

Provo ad introdurre l'analogo delle coordinate sferiche, ma occorrono $n-1$ angoli e tanti integrali trigonometrici

2° approccio

Provo, integrando per sezioni, a scendere di 1 con la dimensione

$$\begin{aligned}
 \text{meas}(B_n(R)) &= \int_{-R}^R dx_1 \int_{S_{x_1}} 1 \, dx_2 \dots dx_n \\
 &\quad \uparrow \text{palla in dim } n-1 \text{ di raggio } \sqrt{R^2 - x_1^2} \\
 &= \int_{-R}^R dx_1 \, \text{meas}(B_{n-1}(\sqrt{R^2 - x_1^2}))
 \end{aligned}$$

$$= \int_{-R}^R dx_1 \omega_{n-1} (R^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

Pongo $x_1 = Ry$, da cui $dx_1 = R dy$

$$= \int_{-1}^1 dy \omega_{n-1} R (R^2 - R^2 y^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \omega_{n-1} R \cdot R^{n-1} \int_{-1}^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy$$

Pongo $y = \sin t$, da cui $dy = \cos t dt$

$$= \omega_{n-1} R^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t dt$$

$$= \omega_{n-1} R^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

= con pazienza si calcolano (vedi analisi 1 dove c'era una formula ricorrente).

3° approccio Provo a scendere di 2 dim. per induzione

$$\text{meas}(B_n(R)) = \iint_{B_2(R)} dx_1 dx_2 \underbrace{\text{meas}(B_{n-2}(\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}))}_{\text{sezione fissati } x_1 \text{ e } x_2}$$

$$= \int_0^R dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \cdot \text{meas}(B_{n-2}(\sqrt{R^2 - p^2})) \cdot p$$

$$= 2\pi \omega_{n-2} \int_0^R (R^2 - p^2)^{\frac{n-2}{2}} \cdot p dp$$

$$= 2\pi \omega_{n-2} \left[\frac{2}{n} (R^2 - p^2)^{\frac{n}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^R$$

$$= 2\pi \omega_{n-2} \frac{R^n}{n}$$

Abbiamo ottenuto la relazione ricorrente

$$\omega_m = \frac{2\pi}{m} \omega_{m-2}$$

da cui seguendo le formule precedenti, per esempio

$$\begin{aligned}\omega_{2k} &= \frac{2\pi}{2k} \omega_{2k-2} = \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \omega_{2k-4} \\ &= \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2\pi}{4} \omega_2 \\ &= \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi^k}{k!}\end{aligned}$$

e idem sui dispari

— 0 — 0 —

Oss. (molto per il futuro) Derivando rispetto ad R la misura n -dimensionale di $B_n(R)$ si ottiene la misura $(n-1)$ -dimensionale (non ancora definita) del suo bordo.

— 0 — 0 —

INTEGRALE IMPROPRIO DI $\frac{1}{|x|^a}$

Caso con p.b.m. in 0

$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a < n \\ \searrow \text{div. a } +\infty & \text{se } a \geq n \end{cases}$$

Approccio buono: cartesiano per colonne dopo aver osservato che basta studiare la convergenza sul cubo unitario centrato nell'origine

$$C_n := [-1, 1]^n$$

$$\int_{C_n} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n = \int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^1 \frac{dx_n}{[x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2]^{a/2}}$$

Parentesi di analisi 1:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{(b^2 + x^2)^{a/2}} dx &\stackrel{x=bt}{=} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{(b^2 + b^2 t^2)^{a/2}} \cdot b dt \\ &= \frac{1}{b^{a-1}} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} dt \end{aligned}$$

Da questo otteniamo

$$\int_{C_n} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n = \int_{C_{n-1}} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{[x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2]^{\frac{a-1}{2}}} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} dt = (\star)$$

Distinguo dei casi:

• Se $a \geq n$, allora $\int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} dt \geq \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} dt}_{\text{numero}}$

Quindi

$$(\star) \geq \text{numero} \cdot \underbrace{\int_{C_{n-1}} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{[x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2]^{\frac{a-1}{2}}}}_{\text{e questo diverge per hp induttiva.}}$$

$b \leq 1$
 $\uparrow$ forse non è proprio
 s, ma $\sqrt{n}$, comunque
 sempre un numero
 > zero

• Se $1 < a < n$, allora $\int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \dots \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{a/2}}}_{\text{numero}}$ e quindi

$$(\star) \leq \text{numero} \cdot \int_{C_{n-1}} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{|x|^{\frac{a-1}{2}}} \text{ e questo converge per hp induttiva}$$

• Per $a < 1$ basta osservare che $\frac{1}{|x|^a} \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$ per $|x|$ piccoli e quindi conv. per confronto.

Analogamente si dimostra che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n = \begin{cases} \text{conv.} & \text{se } a > n \\ \text{div. a } +\infty & \text{se } a \leq n \end{cases}$$

Idea: basta osservare che nell'insieme dato vale

$$\frac{1}{2} \frac{1}{|x|^a} \leq \frac{1}{[1+x_1^2+\dots+x_n^2]^{a/2}} \leq \frac{1}{|x|^a}$$

Ora la convergenza dell'integrale centrale su tutto $\mathbb{R}^n$ si studia per colonne esattamente come il caso precedente, cioè con il b. Quindi si va per inclusione.

— o — o —