

CALCOLO INTEGRALE GAUSSIANO

Esercizio 1 Calcolare $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} \cdot p = 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R p e^{-p^2} dp$$

$$= \pi \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-p^2}]_0^R = \pi$$

Potremmo farlo considerando con i quadrati del tipo $[-n, n]^2 = Q_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{Q_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n dx \int_{-n}^n dy e^{-x^2-y^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-n}^n e^{-x^2} dx}_{I_n} \underbrace{\int_{-n}^n e^{-y^2} dy}_{I_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \right)^2$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Confrontando i due risultati, abbiamo ottenuto che

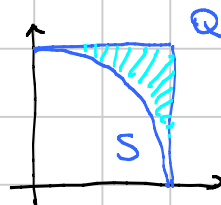
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Esercizio 2 Calcolare

$$\iint_Q \frac{1}{x+y} dx dy$$

$$Q = [0,1] \times [0,1]$$

Improprio per colpa di $(0,0)$



1^a oss. $\iint_Q$ si comporta come $\iint_S$
perché la diff. è un integrale proprio

2^a oss Studio dell'integrale sul settore

$$\iint_S \frac{1}{x+y} dx dy = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\cancel{\rho}(\cos\theta + \sin\theta)} \cdot \cancel{\rho}$$

↑
avrebbe fatto
con l'epsilon

$$= \int_0^1 \rho d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta}_{\text{numero}} = \text{numero.}$$

Esercizio 3

$$\iint_Q \frac{1}{x^3+y^3} dx dy \quad Q = [0,1]^2$$

Questo diverge. Come prima mi riduco al settore, quindi in polari

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\rho^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)} \rho =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\rho^2} d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} d\theta}_{\text{numero} > 0} = \text{numero} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\rho^2} d\rho = +\infty$$

Esercizio 4 $\iint_Q \frac{xy}{x^4+y^4} dx dy$

Brutale: $\sim \frac{1}{\rho^2}$, quindi diverge

In polari

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} d\theta}_{\text{numero } > 0 \text{ indep. da } \theta} = \text{numero} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\rho \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Esercizio 5 $\iint_Q \frac{xy^a}{x^4+y^4} dx dy$ converge $\Leftrightarrow a > 1$

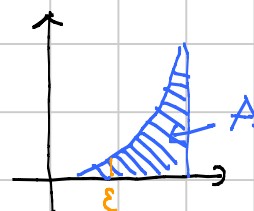
Esercizio 6 $\iint_A \frac{xy}{x^5+y^5} dx dy$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x^2\}$$

Se voglio dimostrare la conv. provo

a scrivere $f(x,y) \leq \dots$

Se voglio la div. scrivo $f(x,y) \geq \dots$



$$f(x,y) \leq \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2} \quad \text{ora integro cartesiano}$$

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{xy}{x^5+y^5} dx dy &\leq \iint_A \frac{1}{x^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx = 1 \end{aligned}$$

Oss. Ho usato la formula di riduzione per l'integrale improprio. Avrei dovuto usare $A_\varepsilon = \{x \in [\varepsilon, 1], 0 \leq y \leq x^2\}$

Esercizio 7

$$\iint_{A_a} \frac{xy}{x^5+y^5} dx dy$$

$$A_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^a\}$$

Uso la stima come prima

$$\frac{xy}{x^5+y^5} \leq \frac{x^{a+1}}{x^5} = \frac{1}{x^{4-a}}$$

da cui

$$\begin{aligned} \iint_{A_a} \dots &\leq \iint_{A_a} \frac{1}{x^{4-a}} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^a} dy \frac{1}{x^{4-a}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^{4-a}} \cdot x^a dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{4-2a}} dx \end{aligned}$$

e questo converge $\Leftrightarrow 4-2a < 1 \Leftrightarrow 2a > 3 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$.

Achtung! Finora ho dimostrato solo che l'integrale dato converge se $a > \frac{3}{2}$.

RESTA DA FARE L'ALTRA PARTE.

1° modo

$$\frac{xy}{x^5+y^5} \geq \frac{y^{\frac{1}{a}} y}{xzy^{\frac{1}{a}}}$$

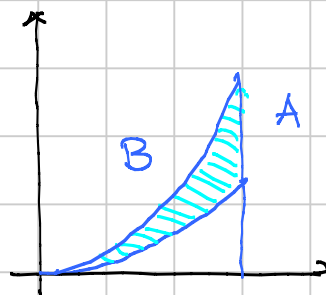
non riesco a trovare
un denom. più grande



2° modo

Provo a staccarmi dall'asse x
Considero il nuovo insieme

$$B_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{2} x^a \leq y \leq x^a\}$$



Osservo che

$$\frac{xy}{x^5 + y^5} \geq \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^a}{x^5 + x^{5a}} = \frac{1}{2} \frac{x^{a+1}}{x^5 + x^{5a}}$$

Ora come prima si verifica che

$$\iint_{A_a} \dots \geq \iint_{B_a} \dots \geq \iint_{B_a} \frac{1}{2} \frac{x^{a+1}}{x^5 + x^{5a}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x^a}^{x^a} dy \frac{x^{a+1}}{x^5 + x^{5a}} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^{2a+1}}{x^5 + x^{5a}} dx$$

e questo per $a \leq \frac{3}{2}$ diverge a $+\infty$ (analisi $\pm$)

- se $a \leq 1$, allora al denominatore comanda x^{5a} e quindi è come

$$\frac{x^{2a+1}}{x^{5a}} = \frac{1}{x^{3a-1}} \quad 3a-1 < 1 \quad a < \frac{2}{3}$$

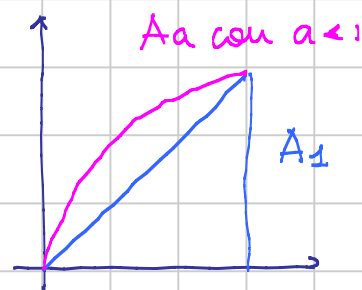
- se $a > 1$, allora al denominatore comanda x^5 e quindi è come

$$\frac{x^{2a+1}}{x^5} = \frac{1}{x^{4-2a}} \quad 4-2a < 1 \quad 2a > 3 \quad a > \frac{3}{2}$$

Apparentemente abbiamo dimostrato che diverge per

$a \in (1, \frac{3}{2})$ e per $a \in [\frac{2}{3}, 1]$. Così resta aperto il caso $a < \frac{2}{3}$

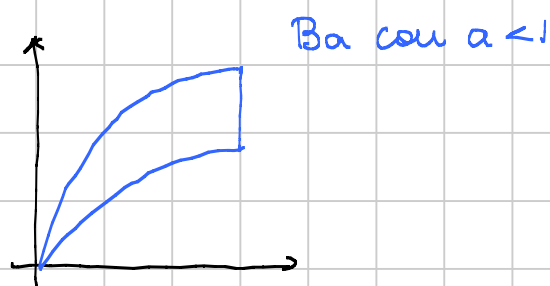
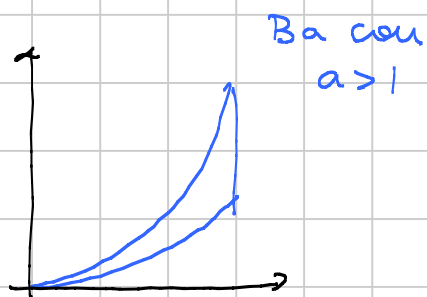
In realtà basta considerare il caso $a \geq 1$. Infatti $A_a \supseteq A_1$ per ogni $a \geq 1$



Per fare la dimostrazione finale, ci sono 3 passi

- Se $a > \frac{3}{2}$ ho convergenza come dim. all'inizio
- Se $a \in [1, \frac{3}{2}]$ ho divergenza confrontando con il B_a
- Se $a < 1$ ho divergenza confrontando con A_1 .

Oss. Pare che $\iint_{B_a} \dots$ converge anche se $a < \frac{2}{3}$



$$\iint_{B_a} \sim \iint_{B_{\frac{1}{a}}} \text{ per simmetria !!!}$$
$$= 0 = 0 =$$