

INTEGRALI MULTIPLI IMPROPRI

Come ad Analisi 1 si tratta di integrali in cui manca almeno uno degli ingredienti base:

→ zona di integr. limitata

→ funzione integranda limitata.

Grossa differenza rispetto ad Analisi 1:

La teoria si fa solo per funzioni $f \geq 0$. Nel caso di funzioni a segno variabile, si scrive

$$f(x) = \underbrace{f_+(x)}_{\geq 0} - \underbrace{f_-(x)}_{\geq 0}$$

e poi si pone

$$\int_A f(x) dx = \int_A f_+(x) dx - \int_A f_-(x) dx$$

↑ ↑
Integrali di funzioni ≥ 0

Tranne nel caso $+\infty - \infty$

Oss. Con lo standard di Analisi 2, la funzione $\frac{\sin x}{x}$ oppure $\cos(x^2)$ non sarebbero integrabili in $(0, +\infty)$

Oss. Ad analisi 2 vale l'implicazione

$$\int_A f(x) dx < +\infty \iff \int_A |f(x)| dx < +\infty$$

"

$$\int_A f_+(x) dx + \int_A f_-(x) dx$$

— 0 — 0 —

Def. (Integrale improprio su $\mathbb{R}^2$)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e ≥ 0 e integrabile sulle palle

Allora si pone

ad R fisso è integrale proprio

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} f(x,y) dx dy$$

↑
cerchio con centro
nell'origine e raggio R

Teorema (Indipendenza da come si cresce $\mathbb{R}^2$).

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e ≥ 0 e integrabile sulle palle.

Sia A_n una successione di insiemi che "civade $\mathbb{R}^2$ ", cioè

- A_n è misurabile e limitato per ogni $n \in \mathbb{N}$
- per ogni $R > 0$ si ha che

$$A_n \supseteq B_R(0) \quad \text{definitivamente in } n.$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{A_n} f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} f(x,y) dx dy$$

Dim. L'integrale al LHS è ben definito per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché A_n è misurabile e limitato e f è integrabile sulle palle.

Il limite al RHS esiste in $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ perché $f \geq 0$, quindi l'integrale è crescente con il raggio. Ci sarebbero 2 casi. Faccio quello in cui il limite $L \in \mathbb{R}$ (l'altro è un facile esercizio).

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\iint_{A_n} f(x,y) dx dy \leq \iint_{B_{R_n}(0)} f(x,y) dx dy \leq L$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per defin. di limite esiste R_0 t.c.

$$\iint_{B_R(0)} f(x,y) dx dy \geq L - \varepsilon \quad \forall R \geq R_0$$

Definitivamente $A_n \supseteq B_{R_0}(0)$, quindi

$$\iint_{A_n} f dx dy \geq \iint_{B_{R_0}(0)} f dx dy \geq L - \varepsilon.$$

↑
ho usato nuovamente
che $f \geq 0$.

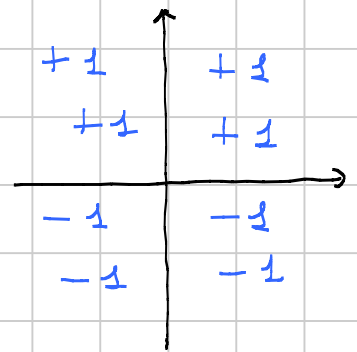
— o — o —

Achtung! Se f non ha segno costante, il limite può dipendere da come realizzo l'invasione.

Se invado con $B_R(0)$ il limite viene 0.

Se invado con

$$A_n = [-n, n] \times [-n, n+1]$$



viene facilmente $+\infty$.

Posso regolare la asimmetria dell'invasione in modo da ottenere un qualunque limite in $\bar{\mathbb{R}}$.

Brutalmente: ad Analisi 1 c'è "un solo modo ragionevole di invadere $[0, +\infty)$, cioè usare $[0, n]$ "
Ad Analisi 2 ci sono infiniti modi ragionevoli.

— o — o —

Def. (Integrale con problema in un p.to).

Sia $f: B_R(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- non-negativa

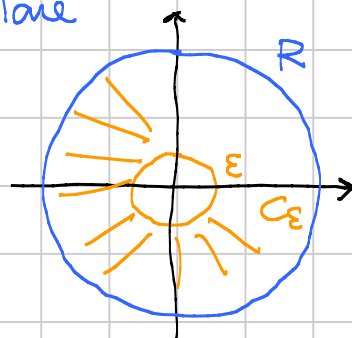
- limitata ed integrabile sulle curve circolari $\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$.

Allora si pone

$$\iint_{B_R(0)} f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{C_\varepsilon} f(x,y) dx dy$$

$\uparrow$
curva circolare

Oss. Vale un teo. analogo di indip.
da come intendo $B_R(0) \setminus \{0\}$
(enunciarlo e dimostrarlo)



Esempio

$$\iint_{B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy$$

$\uparrow$
se $a > 0$ ha problemi in $(0,0)$

$$\iint_{B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{C_\varepsilon} \dots$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^{2a}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ J}}{p} = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{p^{2a-1}} dp$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{1}{p^{2a-1}} dp \quad \text{e questo converge} \Leftrightarrow 2a-1 < 1$$

$\Leftrightarrow a < 1$

— o — o —

Tabellina : l'integrale converge $\Leftrightarrow a < 1$, il che accade
se e solo se la potenza di p al denominatore
è < 2 .

Esempio in $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_{B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iiint_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{1}{(\dots)^a} dx dy dz$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \underbrace{dp}_{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{d\varphi}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho^{2a}} \rho^2 \cos \varphi$$

$$= 4\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho = 4\pi \int_0^R \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho$$

Questo converge $\Leftrightarrow \underbrace{2a-2}_{<0} < \underbrace{1}_{>0}$, cioè $\Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$.

Fatto generale da tabellina

$$\text{In } \mathbb{R}^n \text{ vale } \int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n < +\infty \Leftrightarrow a < n$$

$$\text{In } \mathbb{R}^n \text{ vale } \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n < +\infty \Leftrightarrow a > n$$

esattamente con la stessa dimostrazione

Oss. Si possono usare cambi di variabile e formule di spezzamento anche per integrali impropri (brutale, ma corretto e giustificabile)

$$\iint_{B_R(0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^R dp \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\varphi = 2\pi \int_0^R dp = 2\pi R$$

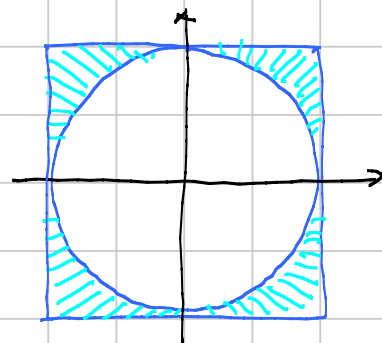
↑
polari dirette
sull'improprio

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^8} dx dy = \int_R^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^{16}} \cdot p$$

$$= 2\pi \int_R^{+\infty} \frac{1}{p^{15}} dp = \text{converge.}$$

Esempio $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy$$



si comporta esattamente come
 l'integrale in $B_1(0)$, perché la
 differenza è un integrale PROPRIO

— 0 — 0 —