

Commenti sulle scelte di piccolezza nella def. prec.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad |\text{Det } J_\varphi(x_1)| &\leq |\text{Det } J_\varphi(x_2)| + |\text{Det } J_\varphi(x_1) - \text{Det } J_\varphi(x_2)| \\ &= |\text{Det } J_\varphi(x_2)| \left(1 + \underbrace{\frac{|\text{Det } J_\varphi(x_1) - \text{Det } J_\varphi(x_2)|}{|\text{Det } J_\varphi(x_2)|}}_{\leq \varepsilon \text{ se } x_1 \text{ e } x_2 \text{ sono vicini}} \right) \end{aligned}$$

Per unif. cont. il num. è piccolo se x_1 e x_2 sono vicini.

Osservo che $|\text{Det } J_\varphi(x_2)| \geq m_0 > 0$ per ogni x_2 . Questo segue dalla limitatezza di J_φ , che è l'inversa.

$$\textcircled{2} \quad J_\varphi(\varphi(y_1)) J_\varphi(y_2)$$

$$= \underbrace{J_\varphi(\varphi(y_1)) J_\varphi(y_1)}_{\text{Identità}} + \underbrace{J_\varphi(\varphi(y_1)) (J_\varphi(y_2) - J_\varphi(y_1))}_{\text{prodotto di matrice limitata per matrice con elementi piccoli a piacere se } y_1 \text{ e } y_2 \text{ sono vicini}}$$

Quando faccio la norma cubica, questa sta sotto $(1+\varepsilon)$.

Oss. La dim. del cambio di variabili è di inizio 1900.

Ci sarebbe un lemma di cubo interno che non abbiamo mai usato, che permetterebbe di avere la disug. opposta nel lemma 2.

LEMMA DI CUBO INTERNO Stesse ipotesi del lemma di cubo est.

Allora

legato a J_φ

$$\varphi(C(x_0, s)) \supseteq C(\varphi(x_0), Ls)$$

Dim. sbagliata

Prendo $C(\varphi(x_0), L_S)$ considero la funzione φ e ce la applico

$$\varphi(C(\varphi(x_0), L_S)) \subseteq C(\varphi(\varphi(x_0)), \hat{L} L_S)$$

↑
faccio in modo che
sia t e sono felice

$$= C(x_0, S)$$

ERRORE FATALE: non è detto che φ sia definita in
tutto $C(\varphi(x_0), L_S)$
— o — o —

La dimostrazione si aggiusta, ma non così (esercizio 😊).
— o — o —

Esercizio 1 Calcolare

$$\iint_A |y - 2x| dx dy$$

$$A = [0, 1] \times [0, 1]$$

Integrale con valore assoluto = spezzo i casi

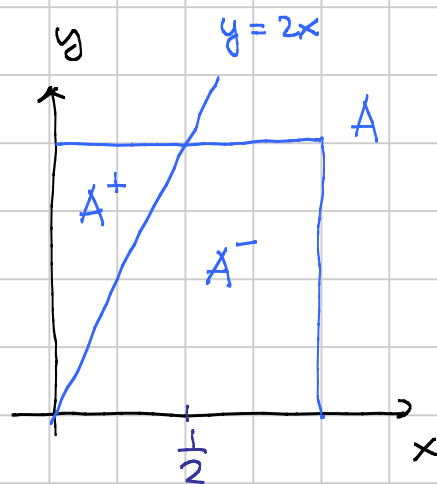
Dopo aver fatto lo spezzamento

$$\iint_A |y - 2x| dx dy = \iint_{A^+} (y - 2x) + \iint_{A^-} (2x - y)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{2x}^1 dy (y - 2x) + \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx (2x - y)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{2x} dy (2x - y) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^1 dy (2x - y)$$

= si fa.



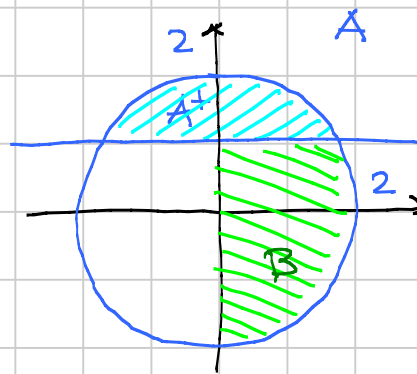
Esempio 2

$A =$ cerchio con centro $(0,0)$ e raggio 2

$$\iint_A |y-1| dx dy$$

$$= \iint_{A^+} (y-1) dx dy + \iint_{A^-} (1-y) dx dy \\ - \iint_{A^-} (y-1) dx dy$$

= si possono fare



Alternativa

$$\iint_A |f(x,y)| dx dy$$

$-f$
"

$$= \iint_A f(x,y) dx dy + 2 \iint_{A^-} |f(x,y)| dx dy$$

$$= \iint_A f(x,y) dx dy - 2 \iint_{A^-} f(x,y) dx dy$$

Nel nostro esempio $\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_A (y-1) dx dy = -4\pi$

$\underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_{-Area}$

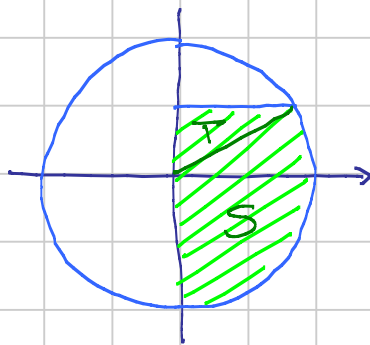
$$\iint_{A^-} (y-1) dx dy = 2 \iint_B (y-1) dx dy$$
$$= 2 \int_{-2}^1 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (y-1) dx$$

$$= 2 \int_{-2}^1 (y-1) \sqrt{4-y^2} dy = \underbrace{2 \int_{-2}^1 y \sqrt{4-y^2} dy}_{\text{tranquillo}} - \underbrace{2 \int_{-2}^1 \sqrt{4-y^2} dy}_{\text{Area di B}}$$

Modo alternativo di integrare su B

$$\iint_B f(x,y) dx dy$$

$$= \underbrace{\iint_S f(x,y) dx dy}_{\text{facile in polari}} + \underbrace{\iint_T f(x,y) dx dy}_{\text{facile in cartesiane}}$$



Esempio 3

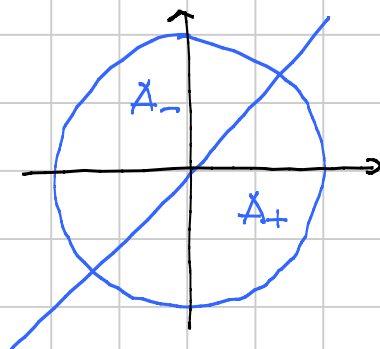
$$\iint_A |x-y| dx dy$$

A = cerchio di prima

$$\iint_A \dots = 2 \iint_{A_+}$$

$(x,y) \rightsquigarrow (y,x)$

$$= 2 \int_0^2 \rho d\rho \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \rho (\cos\theta - \sin\theta) \cdot \rho$$



Esempio 4

$$\iiint_S |z - x^2 - y^2| dx dy dz$$

S = sfera con centro in (0,0,0) e raggio $\sqrt{2}$

$$\iiint_{S^+} + \iiint_{S^-}$$

↓ per colonne o per sezioni

$$\iiint_{S^+} = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy (\dots)$$

↑
raggio $\sqrt{z}$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} dz \iint_{S_z} dx dy (\dots)$$

↑
raggio $\sqrt{2-z^2}$

= concludere il conto

— 0 — 0 —

