

Cambio di variabili nel caso generale (seconda parte)

Lemma 1 (Per ora misterioso) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto e sia $R: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione C^1 . Sia C un insieme misurabile con $\text{Clos}(C) \subseteq A$.

Allora $R(C)$ è misurabile.

(Le funzioni C^1 mandano insiemi misurabili in insiemi misurabili)

Lemma 2 (ε -disug. sui cubi piccoli) (Per ora misterioso)

Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^m$. Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un diffeom. con inversa $\psi: B \rightarrow A$. Supponiamo che J_φ e J_ψ siano unif. cont. in A e B , risp.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni iperubo C chiuso contenuto in B e lato $\leq \delta$ vale

$$\int_B f_C(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

funs. caratt. di C

Oss. sono integrali VERI

Usando i due lemmi misteriosi dimostriamo il teo. generale

Step 1 La ε -disug. vale per le funzioni caratteristiche dei rettangoli (anche grandi) con estremi razionali e con integrali veri.

Dim. Ogni rett. ad estremi razionali è unione finita di cubi che si intersecano solo sul bordo.

Step 2 La ε -disug. vale per le caratt. dei rettangoli qualunque sempre con integrali veri.

Dim Dato R qualunque considero $\hat{R} \supseteq R$ con $\hat{R}$ ad estremi razionali. Allora per lo step 1

$$\begin{aligned} \int_B f_{\hat{R}}(y) dy &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A f_{\hat{R}}(\varphi(x)) |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A f_R(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx \end{aligned}$$

Osservo che LHS = Vol($\hat{R}$) e facendo l'inf. su tutti di $\hat{R} \supseteq R$ a estremi raz. ottengo Vol(R) che è proprio

$$\int_B f_R(y) dy.$$

Step 3 La ε -disug. vale con integrali veri per tutte le SF che sono comb. lin. con coeff. POSITIVI.

Dim. La somma e la molt. per coeff. positivi conservano la disug.

Step 4 La ε -disug. vale con integrali superiori per tutte le funzioni $f \geq 0$ (e limitate) in B .

Dim. Prendo una qualunque SF $g \geq f$ in B . Allora la g è a coeff. positivi e quindi per lo step 3 vale

$$\begin{aligned} \int_B g(y) dy &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A g(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx \end{aligned}$$

int. vero int. vero int. superiore

Facendo l'inf. su tutte le $g \geq f$ ottengo

$$\int_B^* f(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\forall f \geq 0 \text{ in } B$$

Step 5 La disug. dello step 4 vale per ogni $\varepsilon > 0$, quindi vale pure per $\varepsilon = 0$.

Dim. Si tratta solo di passare al limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ al RHS ottenendo

$$\int_B^* f(y) dy \geq \int_A^* f(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \quad \forall f \geq 0 \text{ in } B$$

Step 6 Vale il seguito di = dello step 5.

Dim. Si tratta di osservare che vale la stessa disuguaglianza per la $\psi: B \rightarrow A$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_B^* f(y) dy &\geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{vale per } \psi \\ &\geq \int_B^* \underbrace{f(\varphi(\psi(y)))}_{\substack{y. \\ y.}} \cdot \underbrace{|\text{Det } J_\varphi(\psi(y))| \cdot |\text{Det } J_\psi(y)|}_{\substack{1 \\ 1}} dy \end{aligned}$$

Oss. Allo stesso identico modo si ottiene l'uguaglianza per gli integrali inferiori. Finora c'è la restrizione che $f \geq 0$.

Aggiunto dopo video: l'oss. è una grossa stupidaggine. Lo step 4 salta per gli integrali inferiori, ai quali si può arrivare solo allo step 8 quando le disug. sono diventate uguaglianze. In particolare lo step 7 va decodito dagli int. sup. usando l'integrabilità di LHS e RHS.

Step 7 Vale l'uguaglianza con integrali veri per le caratteristiche dei rettangoli

Dim. Basta osservare che sono ≥ 0 , quindi

$$\int_B^* f_R(y) dy = \int_A^* f_R(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\int_B f_R(y) dy = \int_A f_R(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\int_{\varphi(R)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$(basta osservare che f_R(\varphi(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi(x) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{e che } \varphi(x) \in R \Leftrightarrow x \in \varphi(R))$$

Ora $\int_{\varphi(R)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$ è un integrale vero perché è

l'integrale continua su un insieme misurabile, in quanto $\varphi(R)$ è misurabile per il Lemma misterioso 1.

Step 8 Vale il segno di = tra integrali superiori per ogni f limitata in B , insip. dal segno.

Dim. Basta applicare la prop 2 della les. prec.

— 0 — 0 —

Questo completa la dim. dando per buoni i lemmi 1 e 2.

— 0 — 0 —

Back to lezione precedente

Abbiamo dimostrato che se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è affine invertibile, allora

$$\int_B^* f(y) dy = \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$\uparrow$
non dipende da x

Caso speciale 1 Se f è la caratteristica di un insieme misurabile C con $\text{Clos}(C) \subseteq B$, allora

$$\begin{aligned} \int_B^* f_C(y) dy &= \text{meas}(C) \\ \int_A^* f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx &= \int_{\varphi(C)} \overbrace{|\text{Det } J_\varphi(x)|}^{\text{costante}} dx \\ &= \text{meas}(\varphi(C)) |\text{Det matrice}| \end{aligned}$$

quindi

$$\text{meas}(C) = \text{meas}(\varphi(C)) \cdot |\text{Det matrice}|$$

Caso speciale 2 Se $\varphi(C)$ è il cubo unitario, quindi $C = \varphi(\text{cubo unitario})$, otteniamo

$$\begin{aligned} \text{meas}(\varphi(\text{cubo})) &= \text{meas}(\text{cubo}) \cdot |\text{Det matrice}| \\ &= \overset{1}{1} |\text{Det matrice}| \end{aligned}$$

Questo dim. la caratt. del Det come volume dell'immagine del cubo unitario.

— o — o —